

臨界線上の基音 $2^{-1/2-it}$ と素数・零点双対性

——チューリング・パターンの視点からの覚書——

Toshiki Takahashi*

TML independent researcher

2026 年 8 月 18 日

概要

本稿は、「チューリング・パターンはどのような波の組のとき ζ 関数的になるか」という問いから始まった一連の対話を、論文の形式に整理した覚書である。(1) リーマンの明示公式が与える素数側・零点側の二つのスペクトルと、その集合対集合のフーリエ双対性 (Riemann 1859, von Mangoldt 1895, Weil 1952, および Dyson の準結晶的解釈) を整理する。(2) 臨界線上で複素振幅の絶対値が厳密に $1/\sqrt{2}$ となる素数波が基音 $W(t) = 2^{-1/2-it}$ に限ること、von Mangoldt 規格化のもとでは超越数論的理由により、また零点側では零点高さの下界により、この値が実現不可能であることを初等的に示す。(3) 共役対 $W, \overline{W}$ の重ね合わせを「観測」する (各成分の複素振幅の絶対値の二乗を取る) と、各成分がちょうど $1/2$ を担うこと、およびこれが関数等式の鏡映対のもつ厳密な不変量 $|2^{-s}| |2^{-(1-s)}| = 1/2$ の均衡点として理解できることを述べる。(4) 以上の言い換えのうち何が定理で何が同語反復にすぎないかを明確に区別する。(5) 最後に、 ζ 的スペクトルをもつ仮説的チューリング系の設計要件を素描し、文献上そのような構成が (整理者の知る限り) 存在しないこと、ならびに Turing 自身が 1952–53 年に形態形成と ζ 零点計算の両主題を扱いながら両者を結ばなかった歴史的経緯を注記する。本稿は新規の数学的結果を主張しない。

1 序：チューリング・パターンはいつ「 ζ 的」になるか

Turing の拡散誘導不安定性 [8] は、反応拡散系の線形化から得られる分散関係 $\lambda(k)$ がほぼ単一の臨界波数 k_c の近傍でのみ正になることにより、縞や斑点のような (波数空間で見て) 結晶的なパターンを選択する機構である (総説として [16]; 図 1 左)。

本稿で「 ζ 的」と呼ぶのは、これとは対照的な次の状況である。対数変数 $\xi = \log x$ に対する対数周期波 $\cos(\gamma_n \xi)$ の組であって、周波数集合がリーマン ζ 関数の非自明零点の虚部 $\gamma_1 = 14.134725\dots$, $\gamma_2 = 21.022040\dots$, $\gamma_3 = 25.010858\dots$ であり、振幅がほぼ一様であるもの——ただし後述のとおり、この一様振幅の姿が現れるのは明示公式の測度 (微分) 版においてである。零点がすべて臨界線

* 本稿は 2026 年 8 月 17 日に行われた対話 (ユーザーと Claude, Anthropic) の内容を、同日、Claude が論文形式に整理したものである。本版は初版に対する改訂版であり、同日の追対話で指摘された誤り——明示公式の ψ 版と測度 ($d\psi$) 版の混同 (第 1 節), Weil の公式における極の寄与の欠落 (式 (4)), 「自己双対」の誤称と文献 [24] の引用対象のずれ (第 1 節), 第 7.4 節冒頭の記述, および書誌的細部 (文献 [7] の標題, 文献 [13] の本文参照, 式 (3) の収束に関する注記) ——を修正してある。第 6 節に明記するとおり、本稿は新規の数学的結果を主張しない。誤りはすべて整理者に帰する。本版 (2026 年 8 月 18 日) では、著者表示を改め、第 8 節の結びを差し替え、図 11 点と生成スクリプト (付録 [付録 A](#)) を追加した。

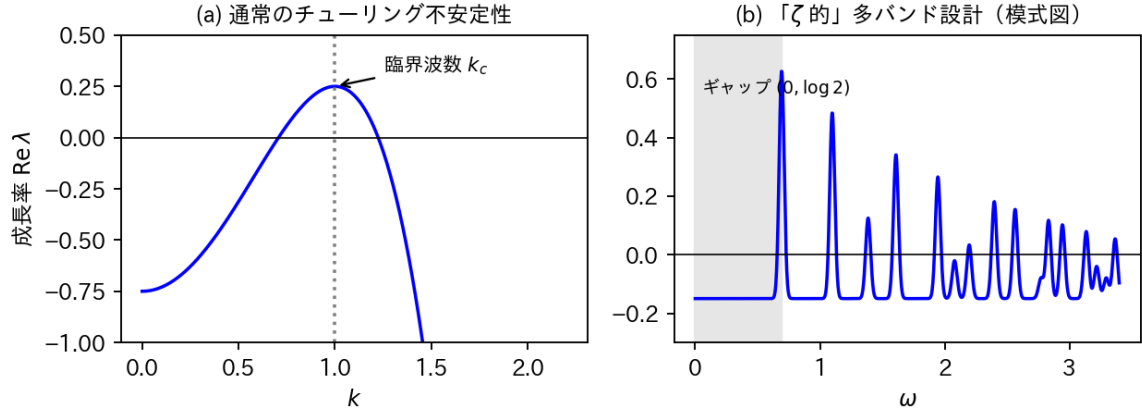


図1 分散関係の対比（模式図）。左：通常のチューリング不安定性は単一の臨界波数 k_c の近傍だけで成長率が正になり、結晶的パターンを選ぶ。右：「 ζ 的」にするための設計目標——成長率が素数楕 $\{k \log p\}$ の多バンド上でのみ正（縦軸・帯幅は任意スケール）。ギャップ $(0, \log 2)$ には帯がない。

上にある（すなわちリーマン予想が成り立つ）と仮定すれば、リーマン–von Mangoldt の明示公式（第2節）は

$$\psi(x) - x \approx -2\sqrt{x} \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(\gamma_n \log x - \theta_n)}{|\rho_n|}, \quad \theta_n = \arg \rho_n, \quad (1)$$

という波束の形をとる（図2）。ここで各零点波の重みは $1/|\rho_n| \approx 1/\gamma_n$ と減衰するから、(1) の振幅は一様ではなく、この和が再構成するのは $\psi(x)$ の階段——素数べき $x = p^k$ における高さ $\Lambda(p^k) = \log p$ の跳び——である。素数べきの位置に鋭い（デルタ的な）スパイクが立つのは、(1) を ξ について微分した測度版、すなわち各零点が等しい重みを担う一様振幅の和 $\sum_n \cos(\gamma_n \xi)$ が現れる $d\psi$ の側である（図3）。形式的には（リーマン予想の下、超関数の意味で）

$$\sum_{n \geq 2} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \delta(\xi - \log n) \approx e^{\xi/2} - 2 \sum_{n \geq 1} \cos(\gamma_n \xi) + (\text{滑らかな減衰項})$$

であり、双対に読めば、周波数 $k \log p$ ・振幅 $(\log p)p^{-k/2}$ の「素数波」の組（左辺の重みつき素数楕）のスペクトルは零点の虚部 $\{\gamma_n\}$ に集中する。

この周波数集合は、等間隔（結晶）でも整数比（可換な周期の重ね合わせ）でもない。間隔統計は GUE ランダム行列のそれに一致する（Montgomery–Odlyzko [12, 15]；図4）。Dyson はこの点集合を「1次元準結晶」——フーリエ変換がふたたび点集合の上に台をもつ純点測度——の例と見ることを提案した [22]。ただしその双対性は、零点集合のフーリエ変換の台が零点集合自身ではなく別の集合 $\{\pm k \log p\}$ に載るという意味で、自己双対ではなく二つの集合の相互双対である（Dyson の定義が要求するのも「点測度のフーリエ変換がまた点測度」であることのみで、自己双対性ではない）。なお関連する数値的研究として、Torquato らは対数目盛の $\{k \log p\}$ ではなく整数直線上の素数そのものの構造因子が稠密なブラッグピークをもつことを示したが、そこに見出される秩序は「実効的に極限周期的（limit-periodic）」であり、彼ら自身これを準結晶とは区別している [24]。

強調すべきは、通常のチューリング機構そのものがこのようなスペクトルを生むという確立した理論は存在しないことである。 ζ 的にするには、(a) 成長率が楕状の多バンド $\{k \log p\}$ の上でのみ正に

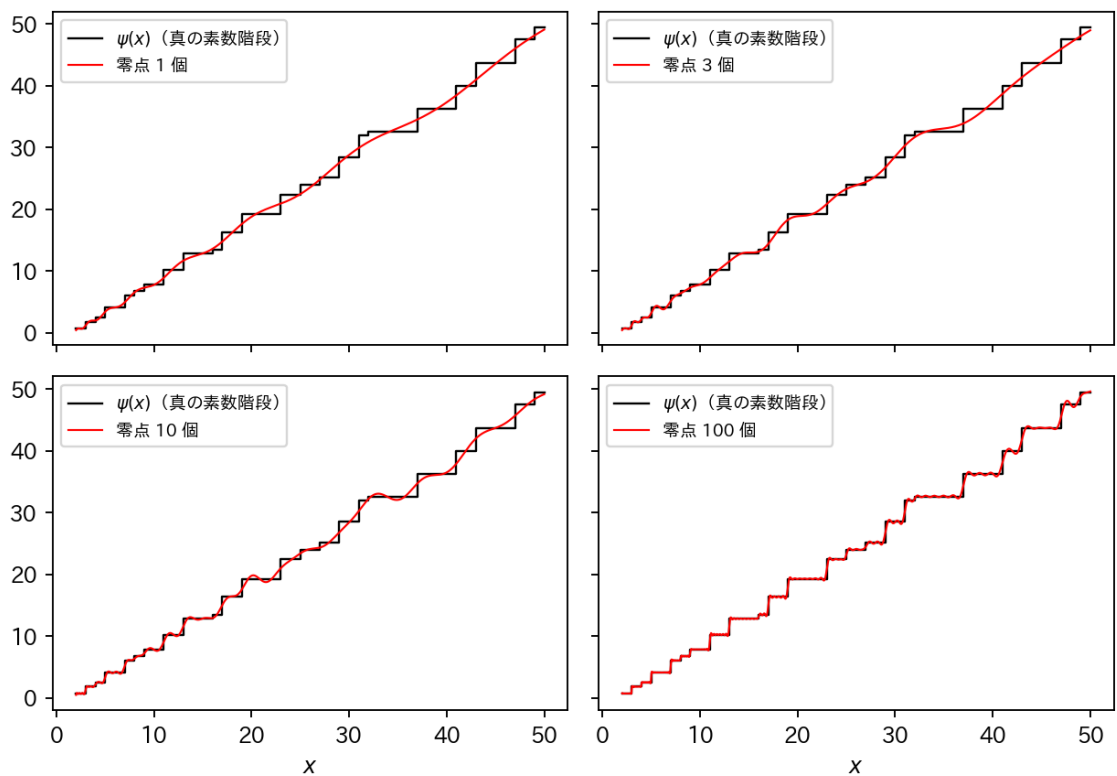


図2 明示公式 (1) の部分和。零点 1, 3, 10, 100 個の波束の干渉が、素数階段 $\psi(x)$ を再構成していく。

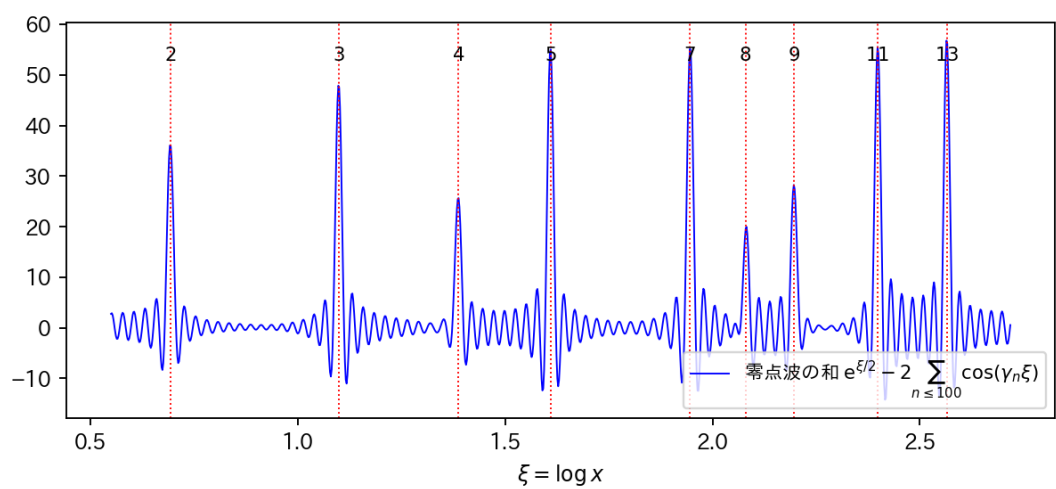


図3 測度 ($d\psi$) 側。一様振幅の零点波の和 $e^{\xi/2} - 2 \sum_{n \leq 100} \cos(\gamma_n \xi)$ は、素数べき $\xi = \log n$ の位置 (赤点線, n を付記) に鋭いスパイクを立てる——零点が素数を「聞く」向きの双対性。

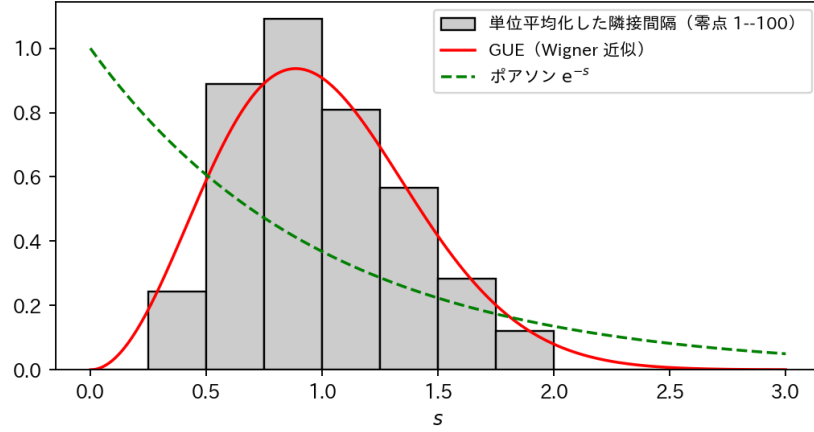


図 4 最初の 100 零点の単位平均化した隣接間隔のヒストグラムと、GUE の Wigner 近似 $p(s) = \frac{32}{\pi^2} s^2 e^{-4s^2/\pi}$ 、およびポアソン分布。標本は小さい（99 間隔）が、強い準位反発と GUE 型の形が見える。

なるような非局所結合核の設計と、(b) 対数周期性を担うスケール不変な基盤（指数成長するドメインなど）の両方が必要になる（第 7 節；図 1 右）。本稿の目的は、対話で得られた観察を整理し、各主張の身分——古典的定理・初等的命題・厳密な恒等式・同語反復・仮説——を明確に区別することにある。本稿のすべての図は、付録付録 A の単一スクリプトで再現できる。

2 明示公式と二つのスペクトル

出発点はオイラー積 [1]

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}, \quad \operatorname{Re} s > 1,$$

であり、その対数は

$$\log \zeta(s) = \sum_p \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} p^{-ks} = \sum_{p,k} \frac{1}{k} p^{-k\sigma} e^{-ikt \log p}, \quad s = \sigma + it, \quad (2)$$

と、周波数 $k \log p$ 、振幅 $\frac{1}{k} p^{-k\sigma}$ の波の和に展開される（ $\operatorname{Re} s > 1$ で絶対収束）。素因数分解の一意性より $p^k = q^\ell \Rightarrow (p, k) = (q, \ell)$ であるから周波数はすべて相異なり、Bohr の概周期関数論 [6] の平均値

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \log \zeta(\sigma + it) e^{i\omega t} dt$$

によって、各係数は $\sigma > 1$ で一意に回収される。臨界線上では級数 (2) そのものは収束しないが、各項は整関数 $\frac{1}{k} p^{-ks}$ の制限として項別に定義できる（第 3 節）。

Riemann [2] が述べ、von Mangoldt [5] が証明した明示公式は、 $x > 1$ が素数べきでないとき

$$\psi(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \log 2\pi - \frac{1}{2} \log(1 - x^{-2}) \quad (3)$$

を与える（ ψ はチェビシェフ関数、和は非自明零点をわたる。零点和は条件収束であり、 $\lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{|\operatorname{Im} \rho| < T}$ の対称極限の意味でとる。この節の古典的内容の詳細は [13] を参照）。零点を共

役対 $\rho, \bar{\rho}$ でまとめ、 $\rho = \beta + i\gamma$ が臨界線上 ($\beta = 1/2$) にあるときは

$$\frac{x^\rho}{\rho} + \frac{x^{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}} = \frac{2\sqrt{x}}{|\rho|} \cos(\gamma \log x - \arg \rho)$$

となって (1) を得る (一般には因子は x^β である)。

Weil [9] はこれを検査関数に対する分布の等式として対称に定式化した。適当な条件を満たす偶関数 h とそのフーリエ変換 g に対し、規格化を除いて

$$\sum_n h(\gamma_n) = h\left(\frac{i}{2}\right) + h\left(-\frac{i}{2}\right) + \text{アルキメデス項} - \sum_{p,k} (\log p) p^{-k/2} [g(k \log p) + g(-k \log p)] \quad (4)$$

という形の等式が成り立つ。右辺冒頭の $h(\pm i/2)$ は $s = 1$ における ζ の極 (および関数等式によるその鏡映 $s = 0$) に由来する寄与であり、明示公式 (3) の主要項 x はここから生じる。ここで本質的なのは、対応が**集合対集合**のフーリエ双対 $\{\gamma_n\} \leftrightarrow \{\pm k \log p\}$ であって、特定の素数波と特定の零点とのあいだに項対項の対応は存在しないことである。どの素数波もどの零点も「専属の相方」をもたない。双対の両向きは図 3 と図 5 に見える。

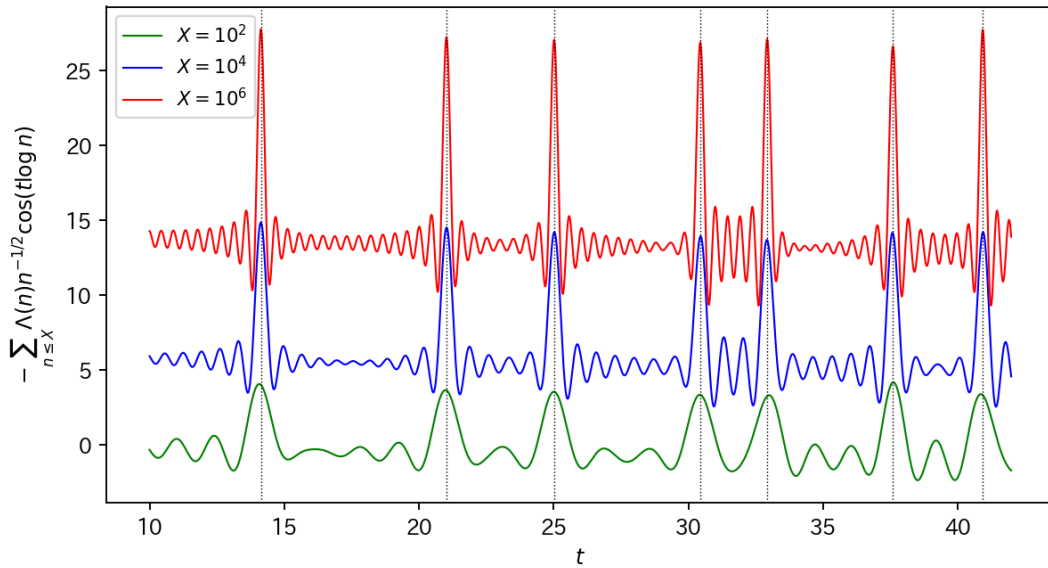


図5 双対の逆向き——素数が零点を「聞く」。重みつき素数和 $\sum_{n \leq X} \Lambda(n) n^{-1/2} \cos(t \log n)$ から極の主要項 $\text{Re}[X^{1/2-it}/(\frac{1}{2} - it)]$ を引いて符号を反転したもの (見やすさのため縦にずらして表示)。 $X = 10^2 \rightarrow 10^6$ でピークが零点 γ_n (点線) に鋭く立っていく。個々の素数波はどの零点も指さないが、総体は全零点を指す。

零点を何らかの系の固有振動数と見る展望は Hilbert–Pólya の予想 (口伝であり出版物はない) に始まり、素数波を周期軌道、明示公式を半古典トレース公式と読む量子カオスの解釈は Berry [14] と Berry–Keating [18] により精密化され、関連するトレース公式は Connes [19] により与えられた。

3 基音 $W(t)$ とその厳密な一意性

定義 3.1. 臨界線 $\operatorname{Re} s = 1/2$ 上の素数波を

$$W_{p,k}(t) := \frac{1}{k} p^{-k(1/2+it)} = \underbrace{\frac{1}{k} p^{-k/2}}_{\text{複素振幅 } a_{p,k}} e^{-it(k \log p)}$$

と定める（整関数 $\frac{1}{k} p^{-ks}$ の臨界線への制限であり、項別には厳密に定義される）。

命題 3.2 (振幅 $1/\sqrt{2}$ の一意性). $a_{p,k} = 2^{-1/2}$ となるのは $(p, k) = (2, 1)$ のとき、かつそのときに限る。

証明. $k = 1$ のとき $p \mapsto p^{-1/2}$ は素数上で狭義単調減少であり、 $p = 2$ のみが解。 $k \geq 2$ のときは $\frac{1}{k} p^{-k/2} \leq \frac{1}{2} \cdot 2^{-1} = \frac{1}{4} < 2^{-1/2}$ で解はない。□

こうして定まる基音

$$W(t) = 2^{-(1/2+it)} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-it \log 2} \quad (5)$$

は、すべての実 t に対して厳密な恒等式 $|W(t)| = 2^{-1/2}$ を満たす。周波数 $\log 2 = 0.693147\dots$ は素数スペクトル全体の最小値（最低周波）であり、周期は $2\pi/\log 2 = 9.06472\dots$ 、振幅は $2x^2 = 1$ の正根という代数的数である（図 6 上）。

命題 3.3 (von Mangoldt 規格化での不可能性). $(\log p) p^{-k/2} = 2^{-1/2}$ を満たす素数 p と整数 $k \geq 1$ は存在しない。

証明. 両辺を平方して整理すると $2(\log p)^2 = p^k$ 。Hermite–Lindemann の定理 [4] より、0 でない代数的数 α に対し e^α は超越数である。対偶をとれば、整数 $p \geq 2$ に対し $\log p$ は超越数。もし $(\log p)^2$ が代数的なら、代数的数体は冪根で閉じているから $\log p$ も代数的となり矛盾。よって左辺 $2(\log p)^2$ は超越数だが、右辺 p^k は整数である。□

命題 3.4 (零点側での不可能性). 非自明零点 $\rho = \beta + i\gamma$ ($0 < \beta < 1$, $\gamma > 0$) に対し $1/|\rho| = 2^{-1/2}$ となることはない。

証明. $|\rho| = \sqrt{2}$ が必要だが、 $|\rho| \geq \gamma \geq \gamma_1 = 14.134725\dots > \sqrt{2}$ 。ここで高さ 14 以下に零点が存在しないことは古典的な数値検証によって確立しており（現在では高さ $3 \cdot 10^{12}$ まで検証済み [25]）、リーマン予想を必要としない。□

注意 3.5 (数値的偶然). 第一零点については $1/|\rho_1| = 0.0707035\dots \approx \frac{1}{10} \cdot 2^{-1/2} = 0.0707107\dots$ が成り立つ。これは $\gamma_1 = 14.1347\dots$ が $10\sqrt{2} = 14.1421\dots$ に近いことによる数値的偶然であり、既知の意味はない。

注意 3.6 (規格化への注意). 本稿の一意性は規格化 $a_{p,k} = \frac{1}{k} p^{-k/2}$ (リーマンの $\Pi(x)$ 型、素数べきを重み $1/k$ で数える流儀) に対するものである。この規格化では基音 2 が最大振幅 $2^{-1/2} = 0.7071\dots$ をもつ。一方 von Mangoldt 規格化 $\Lambda(n)/\sqrt{n} = (\log p) p^{-k/2}$ のもとでは、 $x \mapsto (\log x)/\sqrt{x}$ が $x = e^2 = 7.389\dots$ で最大となるため、最強の波は $n = 7$ (振幅 $0.735485\dots$) であって基音ではな

い。表 1 を参照。いずれの規格化でも、命題 3.2, 3.3 により、厳密に $1/\sqrt{2}$ となる波は $\frac{1}{k}p^{-k/2}$ 規格化の $(2, 1)$ に限られる (図 6, 図 7)。

表 1 最初のいくつかの素数波 (臨界線上)。

$n = p^k$	周波数 $k \log p$	振幅 $\frac{1}{k}p^{-k/2}$	振幅 $\Lambda(n)/\sqrt{n}$
2	0.69315	$0.70711 = 1/\sqrt{2}$	0.49013
3	1.09861	0.57735	0.63428
$4 = 2^2$	1.38629	0.25000	0.34657
5	1.60944	0.44721	0.71976
7	1.94591	0.37796	0.73549
$8 = 2^3$	2.07944	0.11785	0.24506
$9 = 3^2$	2.19722	0.16667	0.36620

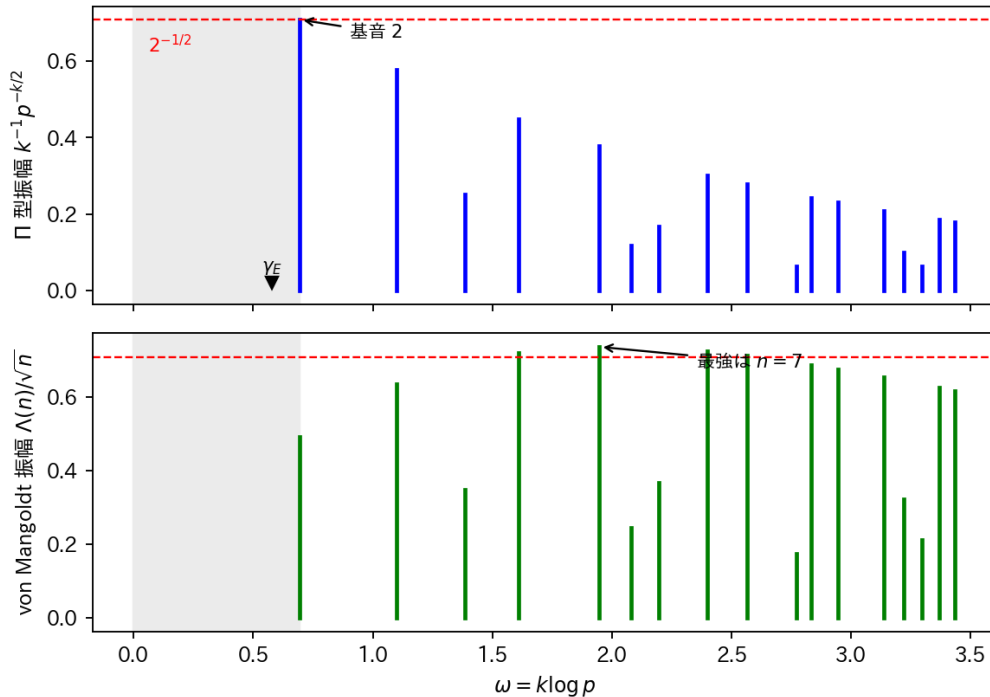


図 6 素数櫛の二つの規格化 (表 1 の図示, $\omega \leq 3.45$)。上: Π 型 $k^{-1}p^{-k/2}$ では基音 2 だけが水準 $2^{-1/2}$ (赤破線) に達する (命題 3.2)。下: von Mangoldt 型では最強は $n = 7$ (注意 3.6)。灰色帯はギャップ $(0, \log 2)$, $\blacktriangledown$ は γ_E 。

4 スペクトル・ギャップとオイラー定数

素数スペクトルの周波数は $k \log p \geq \log 2$ であるから、スペクトルには $(0, \log 2)$ のギャップがある。オイラー定数 $\gamma_E = 0.577216\dots$ は $\log 2 = 0.693147\dots$ より小さく、基音より下のこのギャップに落ちる (図 8)。直接に言えば、 $k \log p = \gamma_E$ は $p^k = e^{\gamma_E} = 1.781072\dots \in (1, 2)$ を要求する

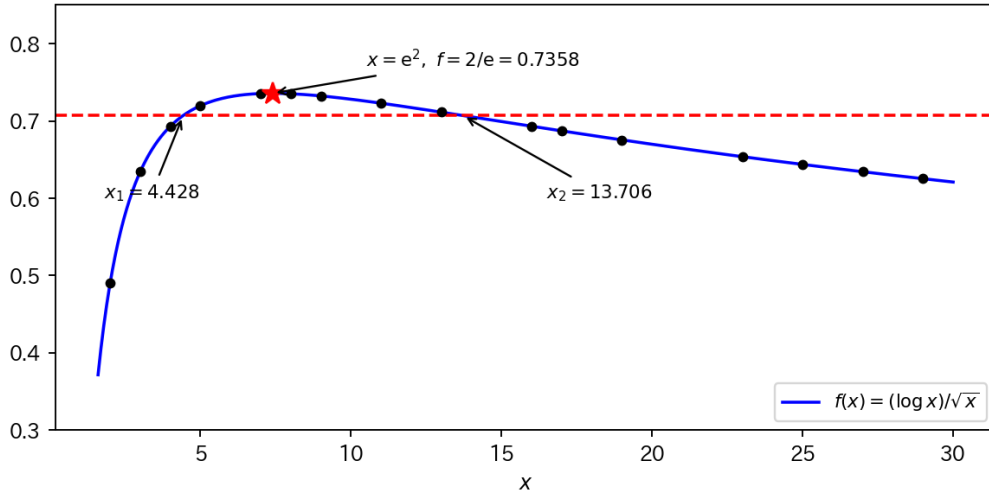


図7 von Mangoldt 規格化の超越性の図 (命題 3.3)。曲線 $f(x) = (\log x)/\sqrt{x}$ は水準 $2^{-1/2}$ (赤破線) を二点 x_1, x_2 (図中に値を記す) で横切るが、どちらも素数べきではなく、素数べき (黒点) はどれも線上に厳密には乗らない。最大は $x = e^2$ (★)。

が、素数べきは 2 以上の整数であるから解はない^{*1}。仮にその周波数の素数波が存在したとすれば振幅は $e^{-\gamma_E/2} = 0.7493\dots > 2^{-1/2}$ となり基音を超える最強の波になるはずだが、素数の世界はその席を空けている。

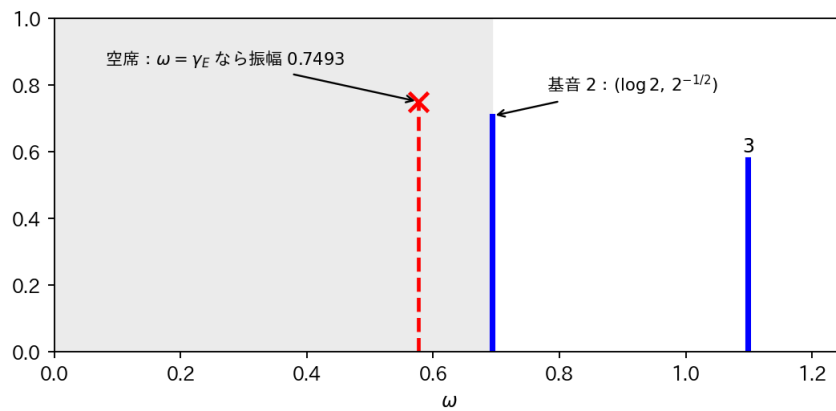


図8 基音の下有空席。ギャップ $(0, \log 2)$ (灰色) に落ちる $\gamma_E = 0.5772$ に素数波は存在しない ($e^{\gamma_E} \in (1, 2)$)。仮に存在すれば振幅 $e^{-\gamma_E/2} = 0.7493$ (赤破線・×) となり、基音 $2^{-1/2}$ を超える最強の波になるはずだった。

γ_E の実際の居場所は、離散スペクトルではなく連続的背景の側である。(i) ζ の $s = 1$ における Laurent 展開の定数項: $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma_E + O(s-1)$ 。(ii) Mertens の定理 [3]: $\prod_{p \leq x} (1 - 1/p)^{-1} \sim e^{\gamma_E} \log x$ 、すなわち全素数波の集団的效果を束ねる係数。(iii) Weil の公式 (4) のアルキメデス項 (Γ 因子)。とくにディガンマ関数 $\psi_\Gamma = \Gamma'/\Gamma$ (チェビシェフ関数 ψ と区別するための表記) は、臨界線の中心 $s = 1/2$ で厳密な恒等式

$$\psi_\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -\gamma_E - 2 \log 2 \quad (6)$$

^{*1} 「オイラー定数」をネイピア数 e と読む場合も同様で、 $p^k = e^e = 15.154\dots$ は整数でない。

を満たす。背景定数 γ_E と基音周波数 $\log 2$ (の 2 倍) が、臨界線の中心においてひとつの古典的恒等式で結ばれていることは注目に値する (図 9)。

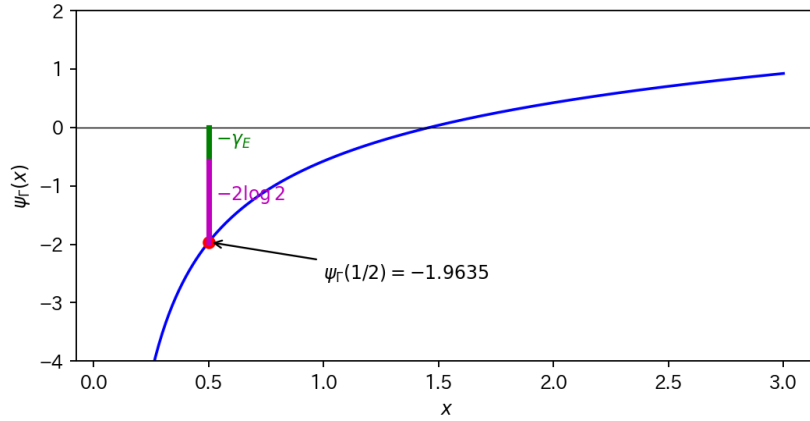


図 9 恒等式 (6)。ディガンマ関数 ψ_Γ の臨界線中心 $x = 1/2$ での値は、背景定数 $-\gamma_E$ (緑) と基音周波数の 2 倍 $-2\log 2$ (マゼンタ) とにちょうど分解される。

5 観測と $1/2$ ：鏡映対の恒等式

実のパターン場を作るには、基音 W とその複素共役 (負周波数成分) $\overline{W}$ の重ね合わせをとる：

$$\varphi(t) = W(t) + \overline{W(t)} = \sqrt{2} \cos(t \log 2) = 2^{-1/2} e^{-i\omega t} + 2^{-1/2} e^{+i\omega t}, \quad \omega = \log 2. \quad (7)$$

観察 5.1 (観測値 $1/2$). 共役対の各成分の複素振幅は $a_\pm = 2^{-1/2}$ であり、その絶対値の二乗——Born 規則の類推でいう「観測」——は

$$|a_+|^2 = |a_-|^2 = \frac{1}{2}$$

である。周波数 $\pm\omega$ が相異なることから Parseval の等式により平均パワーは $\langle \varphi^2 \rangle = |a_+|^2 + |a_-|^2 = 1$ となり、単位の総パワーを二つの成分がちょうど $1/2$ ずつ分担する。これは規格化された等重率重ね合わせ $(|+\rangle + |-\rangle)/\sqrt{2}$ の測定確率 $(1/2, 1/2)$ と同型である。

この $1/2$ には、関数等式の対称性に由来する、任意の s で成り立つ厳密な母体がある。

命題 5.2 (鏡映対の不変量). 関数等式の対称 $s \leftrightarrow 1-s$ が定める鏡映対 $(2^{-s}, 2^{-(1-s)})$ に対し、すべての $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ で

$$|2^{-s}| \cdot |2^{-(1-s)}| = 2^{-\sigma} 2^{\sigma-1} = \frac{1}{2} \quad (8)$$

が成り立つ。二つの因子が等しいのは $\sigma = 1/2$ のとき、かつそのときに限り、共通値は $2^{-1/2}$ 、その二乗は不変量 $1/2$ に一致する。

証明. $|2^{-s}| = 2^{-\sigma}$ より積は σ に依らず 2^{-1} 。等号条件は $2^{-\sigma} = 2^{\sigma-1} \iff \sigma = 1/2$ 。□

すなわち $1/2$ は鏡映対の (どの縦線上でも変わらない) 不変量であり、臨界線はその二因子が均衡する唯一の縦線である。均衡点では相加・相乗平均の等号が成立し、各因子の「観測値」は不変量そのもの、すなわち厳密に $1/2$ となる (図 10)。

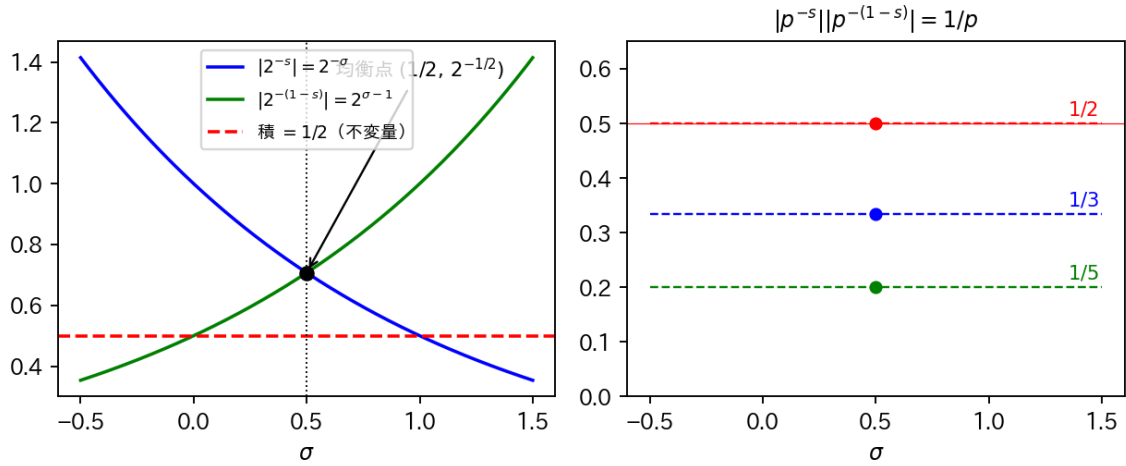


図 10 鏡映対の不変量 (命題 5.2)。左: $|2^{-s}|$ と $|2^{-(1-s)}|$ は $\sigma = 1/2$ でのみ釣り合い (共通値 $2^{-1/2}$)、積は常に $1/2$ 。右: 一般の p では積は $1/p$ で、不変量が臨界横座標 $1/2$ と数値的に一致するのは $p = 2$ のみ (注意 5.3)。

注意 5.3. 一般の素数 p では $|p^{-s}| |p^{-(1-s)}| = 1/p$ であり、均衡点は同じく $\sigma = 1/2$ 、そこでの各因子の二乗は $1/p$ である。不変量が臨界横座標 $1/2$ と数値的に一致するのは $p^{-1} = 1/2$ 、すなわち $p = 2$ のときに限る。この意味で基音は、観測値がそのまま臨界線の座標を読み上げる唯一の素数波である。

注意 5.4. Born 規則の語法は本稿では類推であり、特定のヒルベルト空間や自己共役作用素を構成しているわけではない。動機は Hilbert–Pólya 的展望 (第 2 節) にある。

6 何が定理で、何がそうでないか

本節は本稿の要である。写像 $\sigma \mapsto 2^{-\sigma}$ 、 $\sigma \mapsto 2^{-2\sigma}$ 、 $\sigma \mapsto 2^{1-2\sigma}$ はいずれも単射であるから、

$$\text{「振幅} = 1/\sqrt{2}\text{」} \quad \text{「観測値 } |a|^2 = 1/2\text{」} \quad \text{「総パワー} = 1\text{」} \quad \text{「鏡映対の均衡」}$$

はすべて「 $\sigma = 1/2$ 」の再パラメータ化であり、論理的に同値な言い換え以上の情報を含まない。とくに

リーマン予想 $\iff$ すべての非自明零点は、基音の観測値が厳密に $1/2$ となる唯一の直線上にある

という言い換えは審美的には快いが、標準的な主張に対して算術的内容を一切加えない。任意の単射関数 f を用いた「 $f(\sigma) = f(1/2)$ なる線」でも同種の言い換えは得られる。したがってこの種の再定式化に「最初の発見者」は存在しない——それは発見ではなく書き換えである。対照的に、実質を伴う同値条件としては Nyman–Beurling [7, 11]、Li [17]、Lagarias [21] の判定条件などが知られている。

本稿で厳密に成立している事柄を列挙すれば：第 2 節の古典的枠組 (オイラー積、明示公式 (3)、双対性 (4))、命題 3.2–3.4 (初等的な一意性・不可能性)、命題 5.2 の恒等式 (8)、および恒等式 (6) である。臨界線が特別である本当の理由は、これらの言い換えのいずれでもなく、完備化 $\xi(s) = \xi(1-s)$

の対称軸であること (Riemann [2]) に尽きる。なぜ零点がその対称軸の上に立つのかは、依然として未解決である。

7 仮説的な ζ 的チューリング系：設計要件と現状

7.1 部分集合では何が起きるか

基音に「専属の相方」が存在しないことは、部分的な重ね合わせの振る舞いを見れば明らかになる (図 11)。

(i) W と共役のみ: $\varphi(t) = \sqrt{2} \cos(t \log 2)$ 。単一周期の結晶である。

(ii) 2 の塔 (基音とその全倍音):

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} 2^{-k(1/2+it)} = -\log(1 - 2^{-1/2-it}).$$

$|2^{-1/2-it}| = 2^{-1/2} < 1$ よりこのオイラー因子は零点をもたず、周期 $2\pi/\log 2$ で厳密に周期的である。単一素数 (単一の周期軌道) はなお結晶にすぎない。

(iii) 二素数 $\{2, 3\}$: $\log 2$ と $\log 3$ は素因数分解の一意性より $\mathbb{Q}$ 上一次独立で、重ね合わせは非周期 (準周期) のうなりを見せるが、零点はまだ生じない。

(iv) 全素数べき + ζ 由来の重み: 級数 (2) は臨界線上で収束しないが、その解析接続 $\log \zeta(1/2+it)$ の実部 $\log |\zeta(1/2+it)|$ は $t = \gamma_n$ で対数的に $-\infty$ へ発散する。零点は、ここで初めて、全合奏の特異点として像を結ぶ。

したがって W の「相方」は個々の零点波ではなく零点波の総体 $\{e^{i\gamma_n \tau}\}$ であり、対応は第 2 節の集合対集合のフーリエ双対に限られる。

7.2 設計要件の素描

チューリング機構の語彙でこれを実現しようとするれば、要件は次のようになる。活性化・抑制の 2 成分系に非局所結合核を導入し、線形化の成長率 $\operatorname{Re} \lambda(k)$ が楕 $\{k \log p\}$ の近傍でのみ正になるよう核のフーリエ変換を設計する (多バンド・チューリング不安定性)。振幅の ζ 重み ($\frac{1}{k} p^{-k/2}$ ないし von Mangoldt 型) は線形理論では決まらず、非線形飽和の設計を要する。さらに対数周期性のためには、指数成長するドメイン上の反応拡散 (成長ドメイン上のチューリング系自体は研究がある [20]) やスケール不変な輸送 $x \partial_x$ を用いて、乗法的変数 $\xi = \log x$ の上に系を載せる必要がある。

7.3 現状

整理者の知る限り、また 2026 年 8 月時点での文献検索の範囲では、このような「 ζ 的チューリング系」を構成・実現した研究は見当たらない。本節は結果ではなく設計図である。

7.4 歴史的注記

形態形成の理論と ζ 零点の計算——本稿が並べたこの二つの主題を、文献上ともに扱った人物は Turing 本人において他にない。形態形成の論文 [8] の翌年、最晩年の論文 [10] で彼は ζ 零点の数値

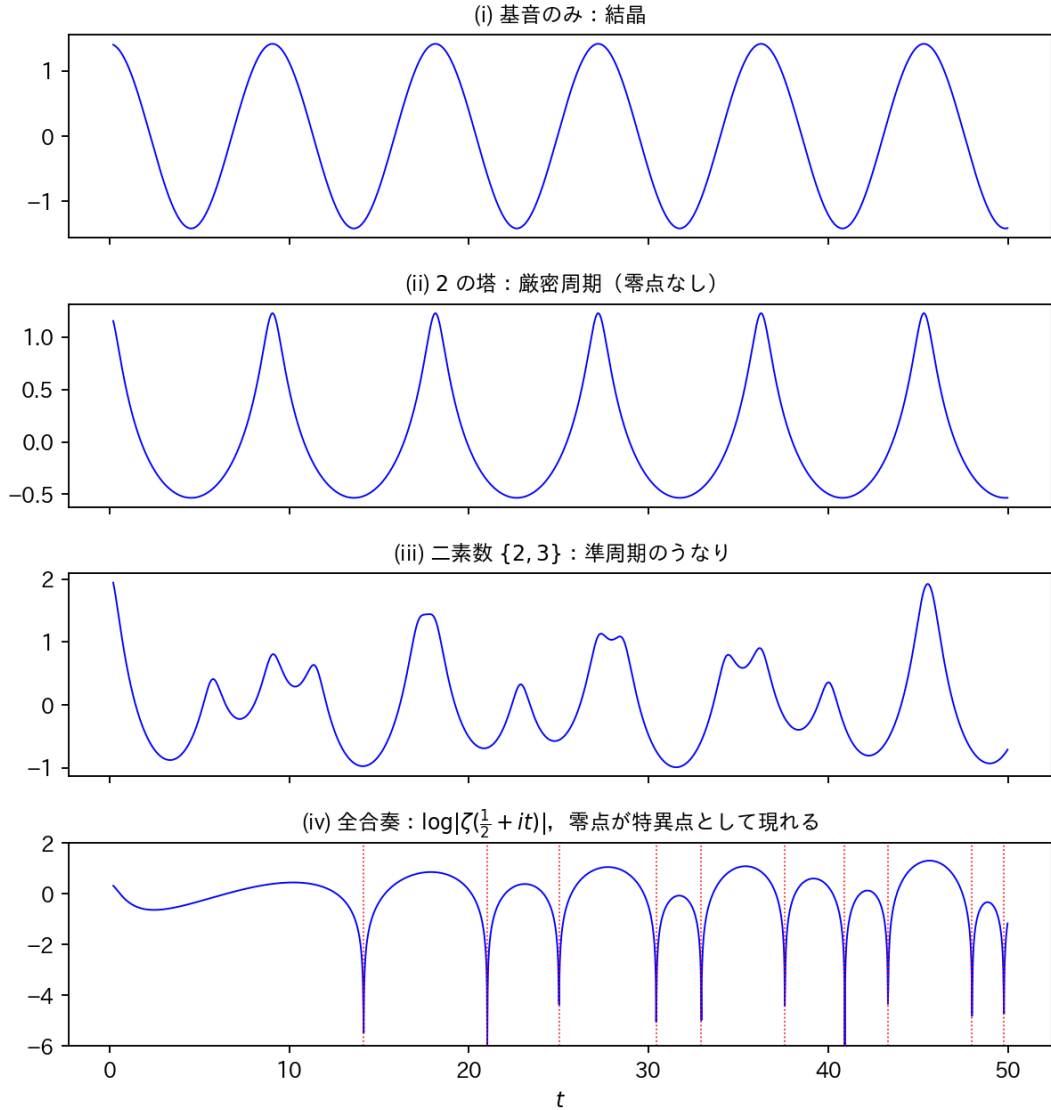


図 11 部分集合の振る舞い (第 7.1 節 (i)–(iv))。基音のみ (結晶) → 2 の塔 (厳密周期・零点なし) → 二素数のうなり (準周期・零点なし) → 全合奏 $\log |\zeta(\frac{1}{2} + it)|$ で初めて、零点 (赤点線) が特異点として像を結ぶ。

計算を報告し、零点リストの完全性を保証する方法——今日「チューリングの方法」と呼ばれる——を導入した。この方法は以後のリーマン予想の数値検証 (たとえば高さ $3 \cdot 10^{12}$ までの検証 [25]) に不可欠の道具であり続け、Selberg ゼータ関数へも拡張されている [23]。すなわち「チューリング」の名が、零点の文献に現れ続けていること自体は今日も変わらない。しかし形態形成と、零点という二つの主題は、1952–53 年に同じ一人の中で隣り合っていないが、当人によっても、その後の誰によっても、結ばれてはいない。

8 結語

「どのような波の組のとき、的になるか」——答えは、単一波数でも格子でもなく、素因数分解の一意性が保証する非通約な周波数の櫛 $\{k \log p\}$ の全体と、その集合的双対 $\{\gamma_n\}$ である。その合奏

の基音 $W(t) = 2^{-1/2-it}$ は、振幅 $1/\sqrt{2}$ ・観測値 $1/2$ という形で臨界線の座標を自らの強度に刻んでいる。しかしそれは臨界線の定義の言い換えであって、説明ではない。

以上の幾何学的分析により、新しい力学ないし理論を発見する人が現れることを願っている。

付録 A 計算スクリプト

本稿の図 1– 図 11 はすべて、以下の単一の Python スクリプトで生成した。実行環境：Python 3.12, numpy, matplotlib, mpmath（零点計算は $\text{mp.dps}=12$, ζ の値は倍精度文脈 fp), scipy。実行時間は約 1–2 分。零点は mpmath.zetazero で計算して `zeros100.txt` にキャッシュし、素数べきは 10^6 までの篩で列挙する。ラベル辞書 LBL により、日本語版・英語版の全図を同一コードで出力する。

```
# tone_figs.py --- all figures for "The Fundamental Tone  $2^{-1/2-it}$ " (JA/EN)
# deps: numpy, matplotlib, mpmath, scipy. run: python3 tone_figs.py (~1-2 min)
import os, math, numpy as np, matplotlib
matplotlib.use('Agg')
import matplotlib.pyplot as plt
from mpmath import mp, fp, zetazero, siegeltheta, digamma
from scipy.optimize import brentq
mp.dps = 12
LOG = math.log; PI = math.pi; R2 = 2**-0.5 # R2 = 1/sqrt(2)

# ----- zeros of zeta (cached in zeros100.txt) -----
if os.path.exists('zeros100.txt'):
    G = [float(x) for x in open('zeros100.txt').read().split()]
else:
    G = [float(zetazero(n).imag) for n in range(1, 101)]
    open('zeros100.txt', 'w').write('\n'.join('%15f' % g for g in G))
G = np.array(G)
TH = np.array([float(siegeltheta(g)) for g in G]) # theta(gamma_n)

# ----- prime powers  $n = p^k \leq 10^6$ ,  $\Lambda(n) = \log p$  -----
N = 10**6; sv = bytearray([1]*(N+1)); sv[0] = sv[1] = 0
for i in range(2, 1001):
    if sv[i]: sv[i::i] = bytearray(len(sv[i::i]))
primes = [i for i in range(2, N+1) if sv[i]]
pp = []
for p in primes:
    q = p
    while q <= N: pp.append((q, math.log(p))); q *= p
pp.sort()
n_arr = np.array([a for a, _ in pp], float)
Lam = np.array([b for _, b in pp])
w_vm = Lam/np.sqrt(n_arr); ln = np.log(n_arr) # von Mangoldt weights

def comb(max_om=3.45): # prime comb (p,k,k log p)
    out = []
    for p in [2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31]:
        k = 1
        while k*LOG(p) <= max_om: out.append((p, k, k*LOG(p))); k += 1
    return sorted(out, key=lambda t: t[2])

def psiN(x, Nz): # explicit formula, Nz zeros
    g = G[:Nz]; r = np.hypot(0.5, g); th = np.arctan2(g, 0.5)
    return (x - np.sum(2*np.sqrt(x)*np.cos(g*LOG(x)-th)/r)
            - LOG(2*PI) - 0.5*LOG(1-x**-2))

LBL = {
    'ja': dict(
        kc='臨界波数  $k_c$ ',
        grow='成長率  $\Re\{\lambda\}$ ',
        turing='(a) 通常のチューリング不安定性',
        zlike='(b)  $\zeta$  的 多バンド設計 (模式図)',
        gap='ギャップ  $\log 2$ ',
        stair=' $\psi(x)$  (真の素数階段)',
        nz='零点  $d$  個',
        xi=' $\xi = \log x$ ',
        comb='零点波の和  $e^{\xi/2} - 2 \sum_{n \leq 100} \cos(\gamma_n \xi)$ ',
        hist='単位平均化した隣接間隔 (零点 1--100)',
    )
}
```

```

gue='GUE (Wigner 近似) ',
poi='ポアソン  $e^{-s}$ ',
land='$-\sum_{n \leq X} \Lambda(n) n^{-1/2} \cos(t \log n)$',
pi_w='$\Pi$ 型振幅  $k^{-1} p^{-k/2}$ ',
vm_w='von Mangoldt 振幅  $\Lambda(n) / \sqrt{n}$ ',
seat='空席:  $\omega = \gamma_E$  なら振幅 $0.7493$',
fund='基音',
strong7='最強は  $n=7$ ',
curve='$f(x) = (\log x) / \sqrt{x}$',
mirr1='$|2^{-s}| = 2^{-\sigma}$',
mirr2='$|2^{-(1-s)}| = 2^{-\sigma-1}$',
prod='積  $= 1/2$  (不変量)',
bal='均衡点  $(1/2, 2^{-1/2})$ ',
sub1='(i) 基音のみ: 結晶',
sub2='(ii) 2$ の塔: 厳密周期 (零点なし)',
sub3='(iii) 二素数  $\{2, 3\}$ : 準周期のうなり',
sub4='(iv) 全合奏:  $\log \zeta(\frac{1}{2} + it)$ , 零点が特異点として現れる',
),
'en': dict(
    kc='critical wavenumber  $k_c$ ',
    grow='growth rate  $\mathrm{Re} \lambda$ ',
    turing='(a) ordinary Turing instability',
    zlike='(b)  $\zeta$ -like'' multi-band design (schematic)',
    gap='gap  $(0, \log 2)$ ',
    stair='$\psi(x)$ (true prime staircase)',
    nz='%d zeros',
    xi='$\xi = \log x$',
    comb='sum of zero waves  $e^{\xi/2 - 2 \sum_{n \leq 100} \cos(\gamma_n \xi)}$ ',
    hist='unfolded nearest-neighbour spacings (zeros 1--100)',
    gue='GUE (Wigner surmise)',
    poi='Poisson  $e^{-s}$ ',
    land='$-\sum_{n \leq X} \Lambda(n) n^{-1/2} \cos(t \log n)$',
    pi_w='$\Pi$-type amplitude  $k^{-1} p^{-k/2}$ ',
    vm_w='von Mangoldt amplitude  $\Lambda(n) / \sqrt{n}$ ',
    seat='empty seat: at  $\omega = \gamma_E$  amplitude would be $0.7493$',
    fund='fundamental',
    strong7='strongest is  $n=7$ ',
    curve='$f(x) = (\log x) / \sqrt{x}$',
    mirr1='$|2^{-s}| = 2^{-\sigma}$',
    mirr2='$|2^{-(1-s)}| = 2^{-\sigma-1}$',
    prod='product  $= 1/2$  (invariant)',
    bal='balance point  $(1/2, 2^{-1/2})$ ',
    sub1='(i) fundamental alone: a crystal',
    sub2='(ii) tower of 2: exactly periodic (no zeros)',
    sub3='(iii) two primes  $\{2, 3\}$ : quasiperiodic beats',
    sub4='(iv) full ensemble:  $\log \zeta(\frac{1}{2} + it)$ , zeros as singularities',
),
}

for LANG in ['ja', 'en']:
    if LANG == 'ja':
        try: import japanize_matplotlib
        except Exception: pass
    L = LBL[LANG]; D = 'figs_tone_' + LANG; os.makedirs(D, exist_ok=True)
    plt.rcParams.update({'figure.dpi': 110, 'savefig.dpi': 170, 'font.size': 10})

    # fig1: dispersion relations (schematic)
    fig, (a, b) = plt.subplots(1, 2, figsize=(7.4, 2.9))
    k = np.linspace(0, 2.2, 400)
    a.plot(k, 0.25 - (k**2 - 1)**2, 'b-'); a.axhline(0, color='k', lw=0.7)
    a.axvline(1, color='gray', ls=':'); a.set_title(L['turing'], fontsize=10)
    a.set_xlabel('$k$'); a.set_ylabel(L['grow']); a.set_ylim(-1, 0.5)
    a.annotate(L['kc'], xy=(1, 0.25), xytext=(1.25, 0.32), fontsize=9,
        arrowprops=dict(arrowstyle='->'))
    om = np.linspace(0, 3.4, 1200); lam = -0.15 * np.ones_like(om)
    for p, kk, w in comb(3.4):
        lam += (p**(-kk/2)/kk)*1.1*np.exp(-(om-w)**2/(2*0.02**2))
    b.plot(om, lam, 'b-'); b.axhline(0, color='k', lw=0.7)
    b.axvspan(0, LOG(2), color='0.9'); b.set_title(L['zlike'], fontsize=10)
    b.set_xlabel('$\omega$'); b.set_ylim(-0.3, 0.75)
    b.text(0.05, 0.55, L['gap'], fontsize=8)
    fig.tight_layout(); fig.savefig(D + '/fig1_dispersion.png'); plt.close(fig)

    # fig2: wave-packet form of the explicit formula (partial sums)
    xs = np.linspace(2.02, 50, 1500)
    xt = np.arange(2, 51); st = np.cumsum([Lam[np.searchsorted(n_arr, m)] if m in n_arr else 0
        for m in xt])
    fig, ax = plt.subplots(2, 2, figsize=(7.4, 5.2), sharex=True, sharey=True)
    for A, Nz in zip(ax.flat, [1, 3, 10, 100]):

```

```

        A.step(xt, st, where='post', color='k', lw=1.0, label=L['stair'])
        A.plot(xs, [psiN(x, Nz) for x in xs], 'r-', lw=0.9, label=L['nz'] % Nz)
        A.legend(fontsize=8, loc='upper left')
    for A in ax[1]: A.set_xlabel('$x$')
    fig.tight_layout(); fig.savefig(D+'/fig2_packet.png'); plt.close(fig)

# fig3: the d-psi side --- zero waves detect the prime powers
xi = np.arange(0.55, 2.72, 0.002)
Dxi = np.exp(xi/2) - 2*np.cos(np.outer(xi, G)).sum(1)
fig, ax = plt.subplots(figsize=(7.2, 3.4))
ax.plot(xi, Dxi, 'b-', lw=0.8, label=L['comb'])
for m in [2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13]:
    ax.axvline(LOG(m), color='r', ls=':', lw=0.8)
    ax.annotate('$%d$' % m, xy=(LOG(m), 0.93*Dxi.max()), fontsize=9, ha='center')
ax.set_xlabel(L['xi']); ax.legend(fontsize=9, loc='lower right')
fig.tight_layout(); fig.savefig(D+'/fig3_dpsi.png'); plt.close(fig)

# fig4: unfolded spacing histogram vs GUE / Poisson
s = np.diff(TH)/PI
fig, ax = plt.subplots(figsize=(6.2, 3.4))
ax.hist(s, bins=np.arange(0, 3.01, 0.25), density=True, color='0.8',
        edgecolor='k', label=L['hist'])
ss = np.linspace(0, 3, 300)
ax.plot(ss, (32/PI**2)*ss**2*np.exp(-4*ss**2/PI), 'r-', label=L['gue'])
ax.plot(ss, np.exp(-ss), 'g--', label=L['poi'])
ax.set_xlabel('$s$'); ax.legend(fontsize=9)
fig.tight_layout(); fig.savefig(D+'/fig4_gue.png'); plt.close(fig)

# fig5: the dual direction --- prime sums peak at the zeros (Landau)
t = np.arange(10, 42, 0.02)
fig, ax = plt.subplots(figsize=(7.2, 4.0))
for X, off, c in [(1e2, 0, 'g'), (1e4, 6, 'b'), (1e6, 14, 'r')]:
    m = n_arr <= X; w = w_vm[m]; l = ln[m]
    S = np.empty(len(t))
    for i in range(0, len(t), 100):
        S[i:i+100] = np.cos(np.outer(t[i:i+100], l)) @ w
    pole = np.real(math.sqrt(X)*np.exp(-1j*t*math.log(X))/(0.5-1j*t))
    ax.plot(t, pole-S+off, c+'-', lw=0.9, # pole term removed
           label='$X=10^{\%d}$' % round(math.log10(X)))
for g in G[G < 42]: ax.axvline(g, color='k', ls=':', lw=0.6)
ax.set_xlabel('$t$'); ax.set_ylabel(L['land'])
ax.legend(fontsize=9, loc='upper left')
fig.tight_layout(); fig.savefig(D+'/fig5_landau.png'); plt.close(fig)

# fig6: the two normalizations of the prime comb
fig, (a, b) = plt.subplots(2, 1, figsize=(7.0, 5.0), sharex=True)
for p, kk, w in comb():
    a.plot([w, w], [0, p**(-kk/2)/kk], 'b-', lw=2)
    b.plot([w, w], [0, LOG(p)*p**(-kk/2)], 'g-', lw=2)
for A in (a, b):
    A.axhline(R2, color='r', ls='--', lw=1); A.axvspan(0, LOG(2), color='0.92')
a.annotate(L['fund']+' $2$ ', xy=(LOG(2), R2), xytext=(0.9, 0.66), fontsize=9,
           arrowprops=dict(arrowstyle='->'))
a.plot(0.5772, 0.02, 'kv', ms=6)
a.annotate('$\gamma_E$', xy=(0.5772, 0.05), ha='center', fontsize=9)
b.annotate(L['strong7'], xy=(LOG(7), LOG(7)*7**(-0.5)), xytext=(2.35, 0.68), fontsize=9,
           arrowprops=dict(arrowstyle='->'))
a.set_ylabel(L['pi_w']); b.set_ylabel(L['vm_w']); b.set_xlabel('$\omega=k\log p$')
a.text(0.06, 0.62, '$2^{-1/2}$', color='r', fontsize=9)
fig.tight_layout(); fig.savefig(D+'/fig6_spectra.png'); plt.close(fig)

# fig7: the transcendence picture for the von Mangoldt normalization
f = lambda x: LOG(x)/math.sqrt(x)
x1 = brentq(lambda x: f(x)-R2, 2.5, 7.0); x2 = brentq(lambda x: f(x)-R2, 8.0, 25.0)
xs2 = np.linspace(1.6, 30, 600)
fig, ax = plt.subplots(figsize=(7.0, 3.6))
ax.plot(xs2, [f(x) for x in xs2], 'b-', label=L['curve'])
ax.axhline(R2, color='r', ls='--')
for m in [2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13, 16, 17, 19, 23, 25, 27, 29]:
    ax.plot(m, f(m), 'ko', ms=4)
ax.plot(math.e**2, 2/math.e, 'r*', ms=11)
ax.annotate('$x=\mathrm{e}^2, f=2/\mathrm{e}=0.7358$',
           xy=(math.e**2, 2/math.e),
           xytext=(10.5, 0.77), fontsize=9, arrowprops=dict(arrowstyle='->'))
ax.annotate('$x_1=.3f$' % x1, xy=(x1, R2), xytext=(1.8, 0.60), fontsize=9,
           arrowprops=dict(arrowstyle='->'))
ax.annotate('$x_2=.3f$' % x2, xy=(x2, R2), xytext=(16.5, 0.60), fontsize=9,
           arrowprops=dict(arrowstyle='->'))
ax.set_xlabel('$x$'); ax.set_ylim(0.3, 0.85); ax.legend(fontsize=9, loc='lower right')

```

```

fig.tight_layout(); fig.savefig(D+'/fig7_transcend.png'); plt.close(fig)

# fig8: the empty seat below the fundamental
fig, ax = plt.subplots(figsize=(6.4, 3.2))
ax.axvspan(0, LOG(2), color='0.92')
ax.plot([LOG(2), LOG(2)], [0, R2], 'b-', lw=3)
ax.plot([LOG(3), LOG(3)], [0, 3**-0.5], 'b-', lw=3)
ax.plot([0.5772, 0.5772], [0, math.exp(-0.5772/2)], 'r--', lw=2)
ax.plot(0.5772, math.exp(-0.5772/2), 'rx', ms=10, mew=2)
ax.annotate(L['seat'], xy=(0.5772, 0.75), xytext=(0.08, 0.86), fontsize=9,
            arrowprops=dict(arrowstyle='->'))
ax.annotate(L['fund']+' $2$:  $(\log 2, 2^{-1/2})$ ' if LANG == 'ja'
            else L['fund']+' $2$:  $(\log 2, 2^{-1/2})$ ',
            xy=(LOG(2), R2), xytext=(0.78, 0.78), fontsize=9,
            arrowprops=dict(arrowstyle='->'))
ax.annotate('$3$', xy=(LOG(3), 3**-0.5+0.02), ha='center', fontsize=10)
ax.set_xlim(0, 1.25); ax.set_ylim(0, 1.0); ax.set_xlabel('$\omega$')
fig.tight_layout(); fig.savefig(D+'/fig8_seat.png'); plt.close(fig)

# fig9: the digamma identity at the center of the line
xs3 = np.linspace(0.07, 3, 400); dg = [float(digamma(x)) for x in xs3]
fig, ax = plt.subplots(figsize=(6.4, 3.4))
ax.plot(xs3, dg, 'b-'); ax.axhline(0, color='k', lw=0.6)
ax.plot(0.5, -0.5772-2*LOG(2), 'ro', ms=6)
ax.plot([0.5, 0.5], [0, -0.5772], 'g-', lw=3)
ax.plot([0.5, 0.5], [-0.5772, -0.5772-2*LOG(2)], 'm-', lw=3)
ax.annotate('$-\gamma_E$', xy=(0.53, -0.30), color='g', fontsize=10)
ax.annotate('$-2\log 2$', xy=(0.53, -1.25), color='m', fontsize=10)
ax.annotate('$\psi(\Gamma(1/2))=-1.9635$', xy=(0.5, -1.9635), xytext=(1.0, -2.6),
            fontsize=10, arrowprops=dict(arrowstyle='->'))
ax.set_xlabel('$x$'); ax.set_ylabel('$\psi(\Gamma(x))$'); ax.set_ylim(-4, 2)
fig.tight_layout(); fig.savefig(D+'/fig9_digamma.png'); plt.close(fig)

# fig10: the mirror-pair invariant and its balance point
sg = np.linspace(-0.5, 1.5, 400)
fig, (a, b) = plt.subplots(1, 2, figsize=(7.4, 3.2))
a.plot(sg, 2.0*(-sg), 'b-', label=L['mirr1'])
a.plot(sg, 2.0*(sg-1), 'g-', label=L['mirr2'])
a.axhline(0.5, color='r', ls='--', label=L['prod'])
a.plot(0.5, R2, 'ko', ms=6); a.axvline(0.5, color='k', ls=':', lw=0.8)
a.annotate(L['bal'], xy=(0.5, R2), xytext=(0.62, 1.35), fontsize=9,
            arrowprops=dict(arrowstyle='->'))
a.set_xlabel('$\sigma$'); a.legend(fontsize=8, loc='upper center')
for p, c in [(2, 'r'), (3, 'b'), (5, 'g')]:
    b.plot(sg, (p*1.0)**(-sg)*(p*1.0)**(sg-1)*np.ones_like(sg), c+'--', lw=1)
    b.plot(0.5, 1.0/p, c+'o', ms=5)
    b.annotate('$1/d$ % p', xy=(1.35, 1.0/p+0.015), color=c, fontsize=9)
b.axhline(0.5, color='r', lw=0.5)
b.set_xlabel('$\sigma$'); b.set_ylim(0, 0.65)
b.set_title('$|p^{-s}||p^{-(1-s)}|=1/p$', fontsize=10)
fig.tight_layout(); fig.savefig(D+'/fig10_mirror.png'); plt.close(fig)

# fig11: subfamilies (i)-(iv) of Section 7.1
tt = np.arange(0.2, 50, 0.02)
z2 = R2*np.exp(-1j*tt*LOG(2)); z3 = (3**-0.5)*np.exp(-1j*tt*LOG(3))
rows = [np.sqrt(2)*np.cos(tt*LOG(2)), (-np.log(1-z2)).real,
        (-np.log(1-z2)-np.log(1-z3)).real,
        np.array([math.log(abs(fp.zeta(complex(0.5, x)))) for x in tt])]
fig, ax = plt.subplots(4, 1, figsize=(7.2, 7.6), sharex=True)
for A, y, ttl in zip(ax, rows, [L['sub1'], L['sub2'], L['sub3'], L['sub4']]):
    A.plot(tt, y, 'b-', lw=0.8); A.set_title(ttl, fontsize=10)
for g in G[G < 50]: ax[3].axvline(g, color='r', ls=':', lw=0.7)
ax[3].set_xlabel('$t$'); ax[3].set_ylim(-6, 2)
fig.tight_layout(); fig.savefig(D+'/fig11_subfam.png'); plt.close(fig)

print(LANG, 'done:', len(os.listdir(D)), 'figures')

```

参考文献

- [1] L. Euler, *Variae observationes circa series infinitas*, Comment. Acad. Sci. Petrop. **9** (1737/1744), 160–188.
- [2] B. Riemann, *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, Monatsber. Königl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (1859), 671–680.

- [3] F. Mertens, *Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie*, J. Reine Angew. Math. **78** (1874), 46–62.
- [4] F. Lindemann, *Über die Zahl π* , Math. Ann. **20** (1882), 213–225.
- [5] H. von Mangoldt, *Zu Riemanns Abhandlung “Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse”*, J. Reine Angew. Math. **114** (1895), 255–305.
- [6] H. Bohr, *Almost Periodic Functions*, Chelsea, New York, 1947.
- [7] B. Nyman, *On the One-Dimensional Translation Group and Semi-Group in Certain Function Spaces*, Thesis, Uppsala, 1950.
- [8] A. M. Turing, *The chemical basis of morphogenesis*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. B **237** (1952), 37–72.
- [9] A. Weil, *Sur les “formules explicites” de la théorie des nombres premiers*, Comm. Sém. Math. Univ. Lund, Tome Supplémentaire (1952), 252–265.
- [10] A. M. Turing, *Some calculations of the Riemann zeta-function*, Proc. London Math. Soc. (3) **3** (1953), 99–117.
- [11] A. Beurling, *A closure problem related to the Riemann zeta-function*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **41** (1955), 312–314.
- [12] H. L. Montgomery, *The pair correlation of zeros of the zeta function*, Proc. Sympos. Pure Math. **24**, Amer. Math. Soc. (1973), 181–193.
- [13] H. M. Edwards, *Riemann’s Zeta Function*, Academic Press, New York, 1974.
- [14] M. V. Berry, *Riemann’s zeta function: a model for quantum chaos?*, in *Quantum Chaos and Statistical Nuclear Physics*, Lecture Notes in Physics **263**, Springer (1986), 1–17.
- [15] A. M. Odlyzko, *On the distribution of spacings between zeros of the zeta function*, Math. Comp. **48** (1987), 273–308.
- [16] M. C. Cross and P. C. Hohenberg, *Pattern formation outside of equilibrium*, Rev. Mod. Phys. **65** (1993), 851–1112.
- [17] X.-J. Li, *The positivity of a sequence of numbers and the Riemann hypothesis*, J. Number Theory **65** (1997), 325–333.
- [18] M. V. Berry and J. P. Keating, *The Riemann zeros and eigenvalue asymptotics*, SIAM Review **41** (1999), 236–266.
- [19] A. Connes, *Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function*, Selecta Math. (N.S.) **5** (1999), 29–106.
- [20] E. J. Crampin, E. A. Gaffney, and P. K. Maini, *Reaction and diffusion on growing domains: scenarios for robust pattern formation*, Bull. Math. Biol. **61** (1999), 1093–1120.
- [21] J. C. Lagarias, *An elementary problem equivalent to the Riemann hypothesis*, Amer. Math. Monthly **109** (2002), 534–543.
- [22] F. Dyson, *Birds and frogs*, Notices Amer. Math. Soc. **56** (2009), 212–223.
- [23] A. R. Booker and D. J. Platt, *Turing’s method for the Selberg zeta-function*, arXiv:1710.00603.
- [24] S. Torquato, G. Zhang, and M. de Courcy-Ireland, *Uncovering multiscale order in the prime numbers via scattering*, J. Stat. Mech. (2018), 093401.
- [25] D. Platt and T. Trudgian, *The Riemann hypothesis is true up to $3 \cdot 10^{12}$* , Bull. London Math. Soc. **53** (2021), 792–797.