

リーマン・ゼータ関数の「波舌」

——位相の〈巻き〉と〈うねり〉への分解，そして素数の櫛の分光——

対話メモランダム（日本語版）

Toshiki Takahashi*

TML independent researcher

2026 年 8 月 19 日

概要

ゼータ関数の偏角 $\arg \zeta(s)$ の 2 次元の色帯——等位曲線に挟まれた帯であり，等位曲線の族はその縁と葉層をなす「櫛」である——を「波舌」と呼び，それについての対話を六つの部分に整理する。(1) 関数等式から櫛曲線（波舌の縁と中心線）の厳密な方程式が得られ，スターリングの公式から漸近方程式 $-2\theta(t) + [\sigma(\sigma - 1)/2 + 1/8]/t + U(\sigma, t) \equiv c \pmod{2\pi}$ が得られる。ここで θ はリーマン-ジエルのシータ関数， $U(\sigma, t) = \sum_{p,k} k^{-1} p^{k(\sigma-1)} \sin(kt \log p)$ は素数の波の重ね合わせである。厳密式は恒等式なのでその検算は実装の検証であり (10^{-20})，漸近式は予測された $1/t$ 補正との比較で試験した。波舌自身は 2 本の櫛曲線に挟まれた帯であり，その幅は 1 次で $\Delta c/|\zeta'/\zeta|$ ，単純零点での先端は開き角がちょうど Δc の楔 ($\arg \zeta'(\rho)$ だけ回転) である。(2) 波舌の解剖学——間隔・傾き・うねり・接地——を計算し，実測と比べる。接地の向きは厳密な式 $\zeta'(\rho_n) = -ie^{-i\theta(\gamma_n)} Z'(\gamma_n)$ が支配し，グラム法則的な漂いのために「いつも水色→赤」は典型則にとどまる一方， ξ の $\pm 90^\circ$ 交代は厳密である。(3) 波舌の位相の二項は，リーマン-ヴェイユの明示公式の両辺そのものである。恒等式は 2.6×10^{-14} の精度で数値確認した。(4) 直線 $\sigma = 1/2$ は， ζ を零から守る二つの機構（ただし第 7 節で述べるとおり完全に独立ではない）—— $\log |\zeta|$ の決定論的ドリフト $(1/2 - \sigma) \log(t/2\pi)$ と，素数雑音の分散 $\frac{1}{2} \sum_p p^{-2\sigma}$ の収束——が同時に失われる唯一の場所であり，後者の発散はメルテンスの $\log \log$ という最も遅い発散である。(5) 舌先には de Bruijn-Newman 流による厳密な「対称性の破れ」の読みがある。定理 $\text{RH} \Leftrightarrow \Lambda \leq 0$ と $\Lambda \geq 0$ (Rodgers-Tao) を合わせると，リーマン予想は $\Lambda = 0$ ，すなわち ζ が相転移点ちょうどに座っているという主張になる。実際の零点 60 個での有限 N シミュレーションは指数 $\approx 1/2$ の平均場ピッチフォークを示す。自明な零点は，アルキメデス因子に属する揺らぎゼロの凍結格子として位置づけら

* 本稿は，2026 年 8 月 17 日に行われた対話（利用者と Claude, Anthropic）を，同日に Claude が論文の形に編集したものである（英語版もあわせて作成した）。同日の並行対話から編まれた姉妹編『臨界線上の基本音 $2^{-1/2-it}$ と素数・零点の双対性』[32] の続編にあたる。「波舌」「垂直接地」という用語は，対話者が 2026 年 8 月 15-16 日のメモ [33] で用いた命名をそのまま使う。第 10 節で明示するとおり，本稿は新しい数学的結果を主張しない。導出はすべて古典的事実の初等的な帰結であり，数値実験は——この形のもの編者の知るかぎり文献に見当たらないが——定理を確立するものではない。誤りはすべて編者に帰する。本改訂版 (v2) は，同一対話内の追加査読で指摘された問題を修正したものである：分光実験の科学的身分の過大表示 (第 9 節)；Hardy の定理の欠落 (第 7 節)；「二つの守り」の独立性の過大表示；本文で引用されていなかった文献 (Speiser, Turing, Arias de Reyna, Dyson, Platt-Trudgian) の本文への組み込み；ギャップ走査の $\omega = 0.10$ までの拡張と 3 つの σ での分光；ピッチフォーク指数への誤差表示；図 9 および表の組版不良；「限界と再現性」小節の追加。参考文献の書誌事項は対話中に記憶から記したもので原典との照合を行っておらず，対話中に体系的な文献調査も行っていない。文献 [31][32] は非アーカイブの引用 (対話文書・一時 URL) である。本版 (2026 年 8 月 18 日) では著者表示を改めた。2026 年 8 月 19 日の版では，著者の追加の指摘——波舌と等位曲線の櫛は複素平面を埋め合う関係にあり，式 (4)(7) は厳密には櫛の式である——に従って第 3.3 節を新設した：波舌自身の方程式 (帯)，幅の法則，楔状の先端を導出して数値検証した。第 3.1 節の定義・概要・図 1・身分表もあわせて改めた。なお，英語版 (*The Ponyos of the Riemann Zeta Function*) では用語を ponyo と改称したが，日本語版では「波舌」を用いる。

れる。(6)「波舌の分光」を $\sigma = -1, -2, -4$ の3点で行うと、9本の線の振幅 $k^{-1}p^{k(\sigma-1)}$ が4~5桁で再現され、基本音の振幅 $0.25000/0.12500/0.03125$ は $2^{\sigma-1}$ 則に従い、 $\log 2$ より下のスペクトルギャップは分解能限界 (≈ 0.06) の近くまで空である。姉妹編 [32] の基本音 $W(t) = 2^{-1/2-it}$ が、最強の線として実際に鳴っている。ただし第9節で明示するとおり、この分光は厳密な恒等式の実装検証であって反証可能な実験ではない。最後に、各主張の身分——古典的定理・初等的導出・厳密恒等式・数値検証・例示・開問題——を一覧表にする。本稿は新しい数学的結果を主張しない。

1 はじめに——波舌とは何か

ゼータ関数の値の偏角 $\arg \zeta(s)$ で複素平面を塗り分けた「位相図」[28]を見ると(図1)、臨界帯の左側に、ほぼ水平な色の帯が幾重にも走っているのがわかる。帯は $\sigma = -\infty$ から流れ込み、ゆるやかにうねりながら右へ伸び、臨界帯に達したところで終わる。終点では全部の色が一点に集まる——そこが非自明な零点である。対話者は2026年8月15–16日のメモ[33]で、この帯を「波舌」、零点での垂直な終わり方を「垂直接地」と名づけ、これは何なのか、なぜこう振る舞うのかを問うた。本稿はその問いへの、対話で得られた答えの記録である。

対話の中で見えてきた指導原理は、位相の**二項分解**である。どの縦線に沿っても、 ζ の位相は

- **巻き**——完備ゼータのアルキメデス因子 $\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$ が供給する、滑らかで決定論的な回転、と
- **うねり**——オイラー積が関数等式を通して供給する、素数の波 $k^{-1}p^{k(\sigma-1)} \sin(kt \log p)$ の重ね合わせ

の和である。巻きが波舌の本数と平均間隔を定め、うねりが波舌を曲げる。波舌は一本につき一個、非自明零点に接地する。そしてこの二項は、リーマン-ヴェイユの明示公式の両辺そのものである。対話者がメモに記録していた現象——間隔がほぼ一定に見えること、 ζ の接地がいつも水色→赤なのに ξ では緑→青が交代すること、自明零点での色の組の規則的な交代——は、すべてこの分解から計算でき、しかも「どこまでが定理で、どこからが典型則か」まで区別できる。以下がその全記録である。

第3節で楕曲線の方程式(厳密版と漸近版)と、波舌自身の帯の方程式——幅の法則と楔状の先端——を導いて検証する。第4節で解剖学(間隔・傾き・コヒーレンス)、第5節で「一舌一零点」と接地の向き、第6節で明示公式との同一視、第7節で臨界線の臨界性、第8節で舌先の対称性破れの読みと自明零点の位置づけ、第9節で「波舌の分光」(その科学的身分を含めて)を述べる。第10節が各主張の身分の一覧、第11節が結語である。数値はすべて対話中に Python (mpmath, 作業精度 8~25 桁; numpy) で計算したものを、そのまま引用する。表と本文の数値は mpmath の任意精度で、図は倍精度 (mpmath.fp) で別個に計算した。

2 最小限の道具立て

記号を最小限そろえる。 $s = \sigma + it$ と書き、非自明零点を $\rho = \beta + i\gamma$ ($\gamma_1 = 14.134725\dots$, $\gamma_2 = 21.022040\dots$) と書く。完備ゼータは $\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ で、鏡映対称 $\xi(s) = \xi(1-s)$ をみたま [1]。 ζ 自身の関数等式は $\zeta(s) = \chi(s)\zeta(1-s)$,

$$\chi(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s), \quad |\chi(\sigma + it)| = \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{1/2-\sigma} (1 + O(1/t)) \quad (1)$$

である。リーマン-ジーゲルのシータ関数 $\theta(t) = \arg \Gamma(1/4 + it/2) - \frac{t}{2} \log \pi$ を使うと、 $Z(t) = e^{i\theta(t)} \zeta(\frac{1}{2} + it)$ は実関数になり、 $\chi(\frac{1}{2} + it) = e^{-2i\theta(t)}$ が成り立つ。漸近的に $\theta(t) = \frac{t}{2} \log \frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + O(1/t)$ 。零

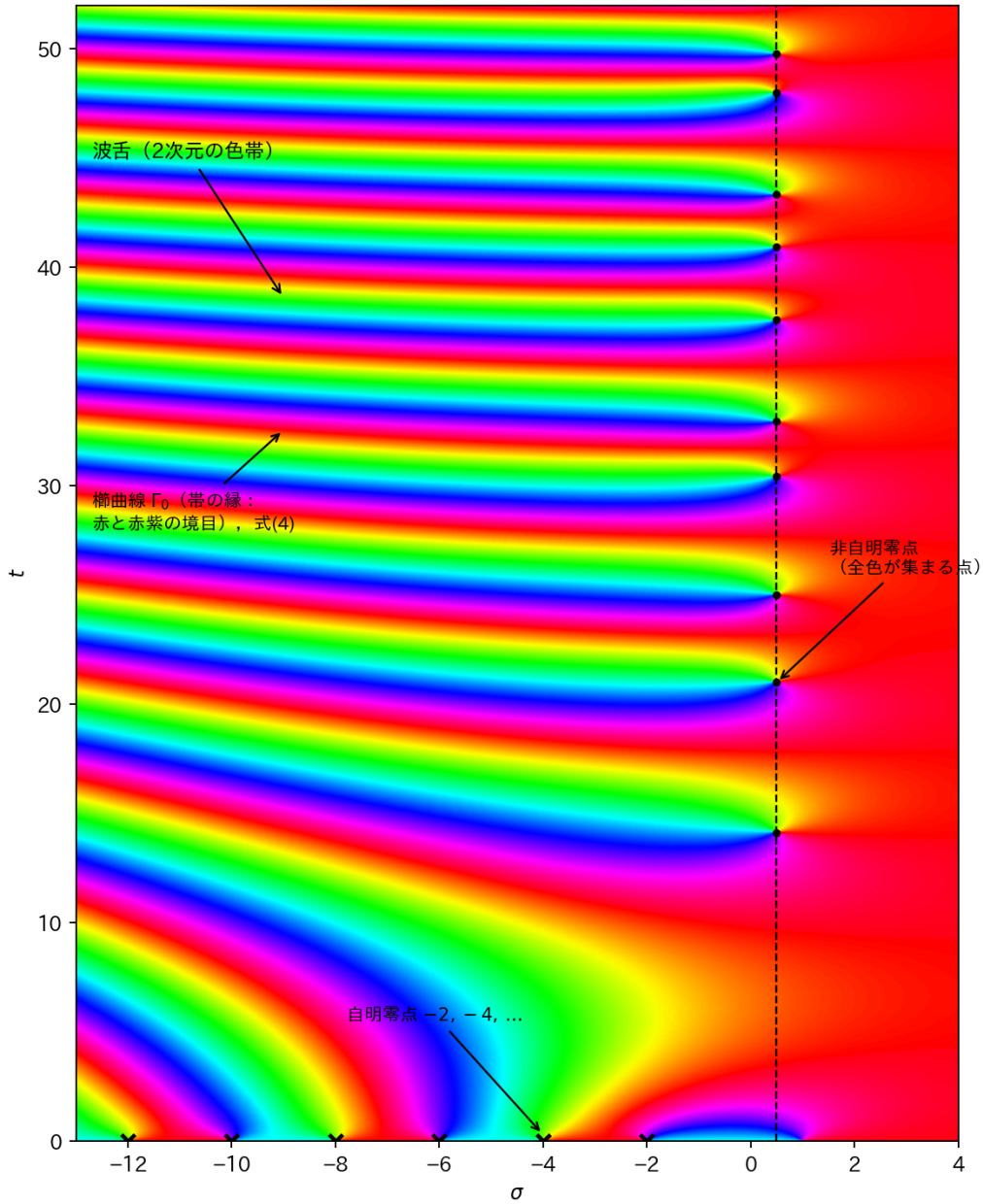


図1 $\arg \zeta(\sigma + it)$ の位相図。色相＝偏角で、正確な錨は赤＝0 と水色＝ π ($\pi/2$, $3\pi/2$ はそれぞれ黄緑, 青紫の帯にあたる)。波舌は左から流れ込み、臨界線(破線)上で接地する。実軸上の $\times$ は自明零点。帯(波舌)と橢曲線を1本ずつ注記した(第3.3節)。

点の個数はリーマン-フォン・マンガルトの公式

$$N(T) = \frac{\theta(T)}{\pi} + 1 + S(T), \quad S(T) = \frac{1}{\pi} \arg \zeta\left(\frac{1}{2} + iT\right) \quad (2)$$

に従う。 S は揺らぎ項で、典型サイズは $\sqrt{\log \log T}$ 程度(セルバーク [9]) にすぎない。素数側では、フォン・マンガルト関数 $\Lambda(n)$ ($n = p^k$ のとき $\log p$, それ以外は 0) とチェビシェフ関数 $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$ を使う。明示公式 [1, 3] は、 $x > 1$ が素数幂でないとき

$$\psi(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \log 2\pi - \frac{1}{2} \log(1 - x^{-2}) \quad (3)$$

と述べる（零点和は対称和）。ヴェイユ [11] による対称形は第 6 節で使う。古典的事項は [15, 18] を参照。

3 波舌の方程式

3.1 定義と厳密な式

波舌とは、本来 2 次元の対象である：色帯 $\{s : c_1 < \arg \zeta(s) < c_2\}$ の連結成分をいう。1 次元の等位曲線 $\Gamma_c = \{s : \arg \zeta(s) = c\}$ を橢曲線，その族を橢と呼ぶ：橢曲線は波舌の縁と中心線であり，著者の指摘のとおり，波舌と橢は複素平面を埋め合う（第 3.3 節）。標準的な位相図で水色の波舌の中心線は Γ_π ，すなわち $\{\text{Im} \zeta = 0, \text{Re} \zeta < 0\}$ である。以下の式 (4)–(8) は，厳密には橢曲線の方程式であり，波舌自身の方程式は第 3.3 節で与える。なお，軌跡 $\{\text{Im} \zeta = 0\}$ ， $\{\text{Re} \zeta = 0\}$ はまさに Arias de Reyna の「 ζ の X 線」[26] で詳細に研究された曲線であり，本稿の等位曲線の解析はその圏内と重なる可能性が高い（対話中に体系的な文献比較は行っていない）。 $\sigma < 0$ では関数等式がそのまま厳密な橢の方程式を与える：

$$t \log 2\pi + \arg \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) + \arg \Gamma(1-s) + \arg \zeta(1-s) \equiv c \pmod{2\pi}, \quad (4)$$

ここで $\arg \sin(\pi s/2) = \text{atan2}(\cos \frac{\pi\sigma}{2} \sinh \frac{\pi t}{2}, \sin \frac{\pi\sigma}{2} \cosh \frac{\pi t}{2})$ 。式 (4) は $s = (-3, 40)$, $(-1, 25)$, $(-5, 7)$, $(-2, 0.8)$ の各点で検算し，残差は作業精度 20 桁で 10^{-20} 程度だった（恒等式なので当然だが，実装の検証になる）。 $t \rightarrow 0$ ではこの atan2 項が 0 か π に退化し，その別は $\sin(\pi\sigma/2)$ の符号で決まる。符号は偶数を通るたびに反転するから，自明零点 $-2, -4, -6, \dots$ で色の組が交互に入れ替わる，という対話者の観察がそのまま再現される（図 2）。

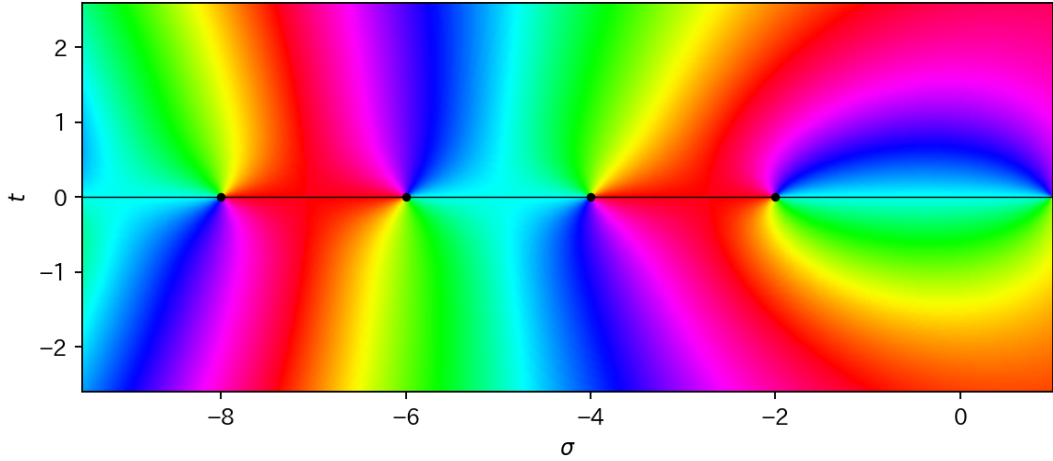


図 2 自明零点のまわり。式 (4) の $\sin(\pi\sigma/2)$ の符号が強制するとおり，色の組が $-2, -4, -6, \dots$ で交互に入れ替わる。

3.2 漸近式

$\chi = \pi^{s-1/2} \Gamma(\frac{1-s}{2}) / \Gamma(\frac{s}{2})$ にスターリング級数を適用すると， σ を有界にとどめて $t \rightarrow \infty$ のとき

$$\arg \chi(\sigma + it) = -2\theta(t) + \frac{1}{t} \left(\frac{\sigma(\sigma-1)}{2} + \frac{1}{8} \right) + O\left(\frac{1+\sigma^4}{t^3}\right) \quad (5)$$

となる。 $\sigma = 1/2$ を代入すると補正が消えて $\arg \chi = -2\theta$ に戻るのが検算になる。一方 $w = 1 - s$ とおくと $\operatorname{Re} w = 1 - \sigma > 1$ なので $\log \zeta(w) = \sum_{p,k} k^{-1} p^{-kw}$ が絶対収束し、

$$\arg \zeta(1 - s) = U(\sigma, t) := \sum_p \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} p^{k(\sigma-1)} \sin(kt \log p) \quad (6)$$

——周波数 $k \log p$ 、振幅 $k^{-1} p^{k(\sigma-1)}$ の**素数の波**の重ね合わせ——が得られる。これは姉妹編 [32] のモード表（臨界線上の $k^{-1} p^{-k/2}$ ）の、一般の σ への拡張である。まとめると、楕曲線の漸近方程式は

$$\boxed{-2\theta(t) + \frac{1}{t} \left(\frac{\sigma(\sigma-1)}{2} + \frac{1}{8} \right) + U(\sigma, t) \equiv c \pmod{2\pi}} \quad (7)$$

となる。数値的には、残差 $\arg \zeta - (-2\theta + U)$ が (5) の $1/t$ 補正とよく一致する： $(\sigma, t) = (-3, 40)$ で実測 $+0.1542$ に対し予測 $6.125/40 = 0.1531$ ； $(-5, 60)$ で $+0.2516$ に対し 0.2521 ； $(-2, 100)$ で $+0.0281$ に対し 0.0313 （差は素数之和の打ち切り分）。 $\sigma = 0$ では級数 (6) が条件収束の縁になり、打ち切り比較は当然悪化する。

錨点 t_c ($-2\theta(t_c) \equiv c$) のまわりでグラフ $t(\sigma)$ に解くと

$$t(\sigma) \approx t_c + \frac{1}{L} \left[\frac{\sigma(\sigma-1)/2 + 1/8}{t_c} + U(\sigma, t_c) \right], \quad L = \log \frac{t_c}{2\pi} \quad (8)$$

——「水平線+左上への放物線状の反り+素数のうねり」という、図 1 で見えている姿そのものである。

式 (4)–(8) が記述しているのは楕——1 次元の骨格——である。波舌自身は 2 次元であり、次にその方程式を与える。

3.3 波舌自身——帯・幅・先端

色相の区間 (c_1, c_2) （幅 $\Delta c = c_2 - c_1$ ，中心 $\bar{c} = (c_1 + c_2)/2$ ）を固定する。波舌の厳密な方程式は二重不等式

$$c_1 < \arg \zeta(s) < c_2 \pmod{2\pi} \quad (9)$$

（の連結成分）である。その境界は 2 本の楕曲線 $\Gamma_{c_1}, \Gamma_{c_2}$ であり、内部は中間色の楕曲線で葉層化される： $P = \bigcup_{c_1 < c < c_2} \Gamma_c$ 。すなわち波舌とは楕を色区間だけ厚くしたものであり、楕曲線は幅ゼロの波舌である。色円の任意の有限分割 $0 = c_0 < c_1 < \dots < c_K = 2\pi$ を固定すれば、零点と極を除いた平面は、開いた波舌たちと閉じた楕 $\bigcup_j \Gamma_{c_j}$ との交わりのない合併に分解する——両者は平面を**埋め合う**。漸近的には、式 (7) により、波舌は帯

$$\left| -2\theta(t) + \frac{1}{t} \left(\frac{\sigma(\sigma-1)}{2} + \frac{1}{8} \right) + U(\sigma, t) - \bar{c} \right| < \frac{\Delta c}{2} \pmod{2\pi} \quad (10)$$

であり、その両縁は式 (8) の $c = c_1, c_2$ のグラフである。

幅。二つの法則が直ちに従う。垂直方向には、(8) を c について差分して（同じことだが Δc を $|\partial_t \arg \zeta| = |\operatorname{Re}(\zeta'/\zeta)| \approx 2\theta' - U'$ で割って）厚さ

$$w_t(\sigma, t) = \frac{\Delta c}{2\theta'(t) - U'(\sigma, t)} = \frac{\Delta c}{2\pi} \Delta t \quad (11)$$

を得る（ Δt は楕の間隔 (13)）：色円の割合 $\Delta c/2\pi$ を占める色相区間は、垂直周期の同じ割合を占める。帯に垂直な方向には、 $\arg \zeta = \operatorname{Im} \log \zeta$ より $|\nabla \arg \zeta| = |\zeta'/\zeta|$ であるから、幅は

$$w_\perp(s) = \frac{\Delta c}{|\zeta'/\zeta(s)|} + O(\Delta c^2) \quad (12)$$

—— $\zeta' \neq 0$ なるすべての点で成り立つ厳密な局所法則である。どちらも水色の波舌 ($\bar{c} = \pi$, $\Delta c = \pi/2$) で検証した： $s = -2 + 40.6i$ で $|\zeta'/\zeta| = 1.92892$, 予測 $w_{\perp} = 0.81434$ に対し実測 0.81073 (-0.4% は $O(\Delta c^2)$ 項)； $\sigma = -2$ で γ_7 に接地する帯の垂直厚は実測 0.81087 対 (11) $= 0.81104$ (-0.02%)。

先端。 重複度 m の零点 ρ の近くでは $\arg \zeta(s) = \arg a_m + m \arg(s - \rho) + O(|s - \rho|)$ (a_m は先頭テイラー係数) なので, (9) は $\arg(s - \rho) \in ((c_1 - \arg a_m)/m, (c_2 - \arg a_m)/m)$ ($2\pi/m$ を法として) となる：舌先は開き角がちょうど $\Delta c/m$ の楔 ($m = 1$ なら 1 個) であり, 単純零点では二等分方向が $\bar{c} - \arg \zeta'(\rho)$ である。これが位相図の尖った「舌先」の正体であり, 角度と向きまで決まる：幅は $\Delta c|s - \rho|$ で線形に閉じ ($|\zeta'/\zeta| \sim 1/|s - \rho|$ ゆえ (12) と整合), 向きの法則 (14) と $\arg \zeta'(\rho_n)$ が典型的に 0° 付近であること (第 5.2 節) から, 水色の楔 ($\bar{c} = \pi$) は左向きに, 赤の楔は右向きに開く——観察されていた接地の幾何である。 ρ_7 ($\arg \zeta'(\rho_7) = -11.7^\circ$) での実測：半径 $r = 0.10, 0.03, 0.01$ の円周上での帯 $\Delta c = 90^\circ$ の角測度は $82.7^\circ, 87.7^\circ, 89.3^\circ$ で, 90° に線形収束する。図 3 に帯・楯の縁・楔を示す。極 $s = 1$ では同じ展開が $m = -1$ で成り立ち, どの波舌も同じ開き角の楔を 1 個そこにもつが, 色の順序は逆転する——平面で唯一の「反接地」である。

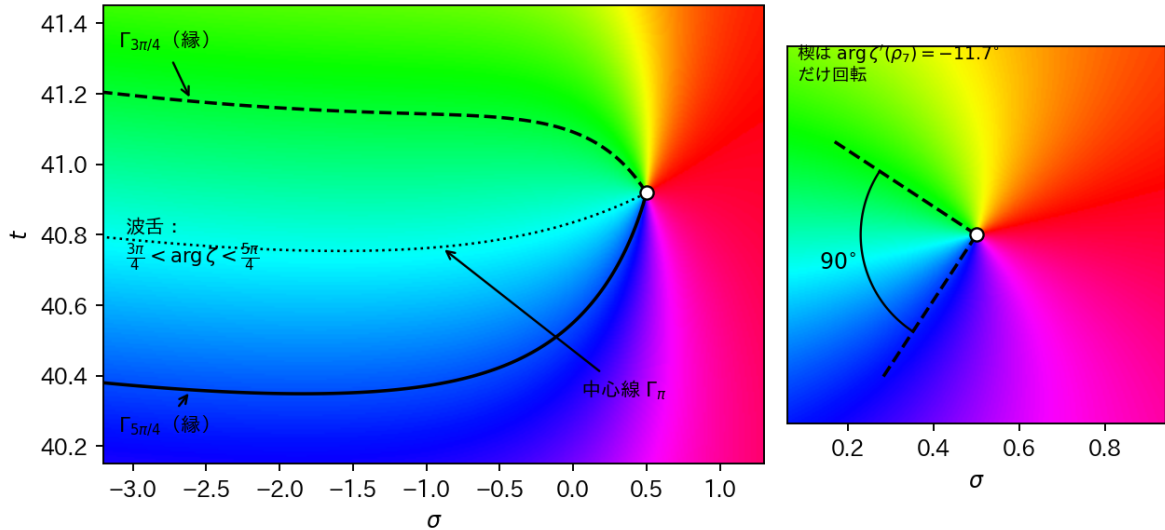


図 3 波舌自身 (水色の帯 $\bar{c} = \pi$, $\Delta c = \pi/2$) と γ_7 への接地。左：帯 (9) と, その縁である 2 本の楯曲線 $\Gamma_{3\pi/4}, \Gamma_{5\pi/4}$ (黒実線), 中心線 Γ_π (点線)；縦横の縮尺は不等。右：先端の等縮尺拡大——開き角がちょうど $\Delta c = 90^\circ$ の楔が $\arg \zeta'(\rho_7) = -11.7^\circ$ だけ回転している (破線)。式 (14) の予言どおり。

3.4 垂直接地は局所的な性質である

対話の出発点は, 対話者の予想「 $\Gamma := \{s : \operatorname{Re}(\zeta'/\zeta)(s) = 0\}$ (虚方向の垂直接地の集合) は臨界線 L に一致し, $Z_{\text{nt}} \subseteq \Gamma \subseteq L$ からリーマン予想が従う」の検討だった。結論を先に言うと, この鎖は閉じない。まず, 重複度 m の零点 ρ の近くでは $\zeta'/\zeta \sim m/(s - \rho)$ なので, $\operatorname{Re}(\zeta'/\zeta) = 0$ の曲線は零点がどこにあっても局所的には縦線 $\sigma = \beta$ になる。つまり垂直接地は零点の位置について何の情報も持たない, 自動的な局所現象である。さらに $\Gamma \subseteq L$ は ζ について偽である：臨界線上で $\operatorname{Re}(\zeta'/\zeta)(\frac{1}{2} + 20i) = -0.579 \neq 0$ ；帯の内側・第 1 零点のすぐ隣の点 $(\sigma, t) = (0.5041, 14.2347)$ は線外で Γ に乗る； ζ' の最初の複素零点 $s = 2.46316 + 23.29832i$ (そこで $\zeta \neq 0$) も $\sigma \approx 2.46$ で Γ に乗

る (図 4)。一方 ξ については $\operatorname{Re}(\xi'/\xi) = 0$ が臨界線上で恒等的に成り立ち、「そこでしか成り立たない」という主張はリーマン予想と同値である (Lagarias[24])。また、帯の近くでのこの種の曲線の幾何は古典的には Speiser[8] に遡る：その定理——RH $\iff \zeta'$ が $0 < \sigma < 1/2$ で非零——は、 ζ' の軌跡についての主張が RH の全重量を担いうることを示している。すなわちこの鎖は困難を消すのではなく、そっくり移し替える。以下の大域的な解析は、この認識から出発している。

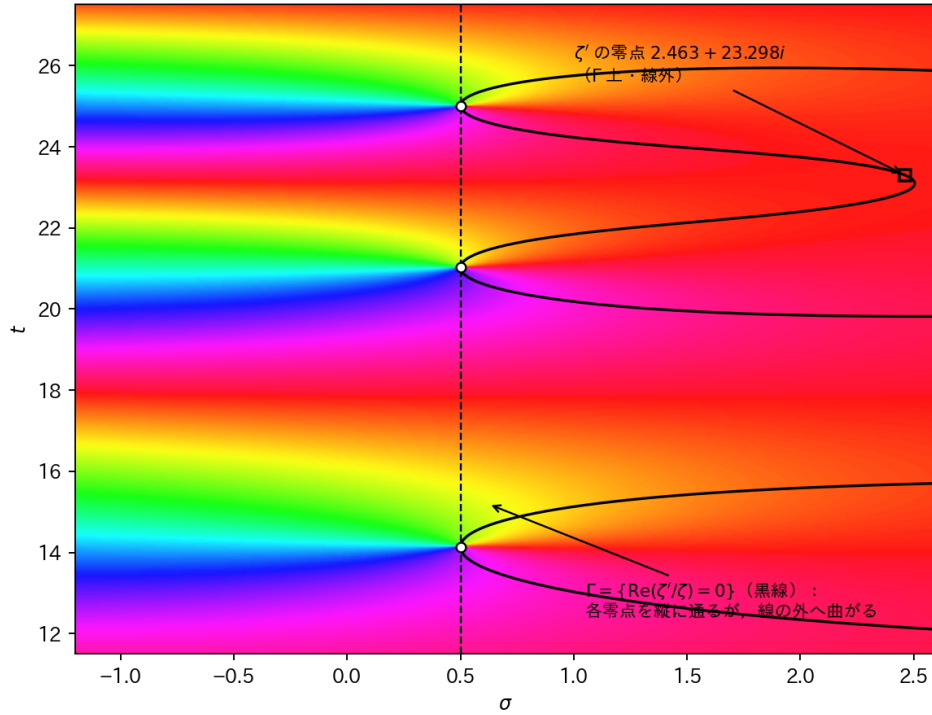


図 4 接地の拡大と曲線 $\Gamma = \{\operatorname{Re}(\zeta'/\zeta) = 0\}$ (黒線)。 Γ は各零点を縦に通る——零点の位置に依らない局所的性質——が、その後は線の外へ曲がる。四角の印は ζ' の最初の複素零点 (Γ 上, $\sigma \approx 2.46$)。

4 波舌の解剖学

4.1 間隔——なぜ一定に見えるのか

同じ色の隣り合う波舌の間では、位相 (7) がちょうど 2π 進む。したがって (平均値定理により、導関数はどこか中間点での値として)

$$\Delta t = \frac{2\pi}{2\theta'(t) - U'(\sigma, t)} = \frac{2\pi}{\log \frac{t}{2\pi} - \sum_{p,k} p^{k(\sigma-1)} (\log p) \cos(kt \log p)}. \quad (13)$$

「間隔が一定に見える」ことは、二つの独立な小ささに分解される。

第一に、**巻きは対数でしか変わらない**。基準の間隔 $\Delta t_0 = 2\pi / \log(t/2\pi) = \pi / \theta'(t)$ は、非自明零点の平均間隔そのものである。波舌を 1 本進む間の変化率は $2\pi / (tL^2)$ で、 $t = 40$ で約 4.5%, $t = 200$ で 0.26%。間隔が半分になるには $t \mapsto t^2/2\pi$ (40 なら ≈ 255) が必要で、視野が t 自身より狭いかぎり、目には一定にしか見えない。

第二に、うねりは帯の左では指数的に潰れていて、しかもコヒーレントに働く。分母の揺らぎは $|U'| \leq \sum_{p,k} p^{k(\sigma-1)} \log p = |\zeta'(1-\sigma)|$ で押さえられ、数値は $\sigma = -2$ で 0.19813 (L の約 11%)、 $\sigma = -4$ で 0.02857、 $\sigma = -6$ で 0.00603。さらに——これは姉妹編 [32] のスペクトルギャップの主張を波舌の言葉に置いたものだが——最も遅い素数モードの周波数は $\log 2$ 、波長は $2\pi/\log 2 = 9.0647$ であり、 $L > \log 2$ すなわち $t > 4\pi$ のとき常に波舌の間隔 $2\pi/L$ を上回る。隣り合う波舌はほぼ同じ向きに一緒に押されるので、うねりは波舌を「曲げる」が、ほとんど「詰めない」。

図 5 と表 1 が実測との比較である。巻きだけで既に数%以内、うねり補正（中点評価）でほぼ 1% 以内に入る（残る 2–3% は中点評価の近似のせいで、ギャップ平均を使えば厳密に合う）。 $t \approx 200$ では実測 1.76–1.88 に対し $2\pi/L = 1.81$ 、 $\sigma = -5$ では巻きだけで誤差 1.5% 未満だった。傾き（放物線状の反り）も別に検証した： $\sigma = -8$ で予測 +0.473 に対し実測 +0.465、 $\sigma = -4$ で 0.132 に対し 0.131。

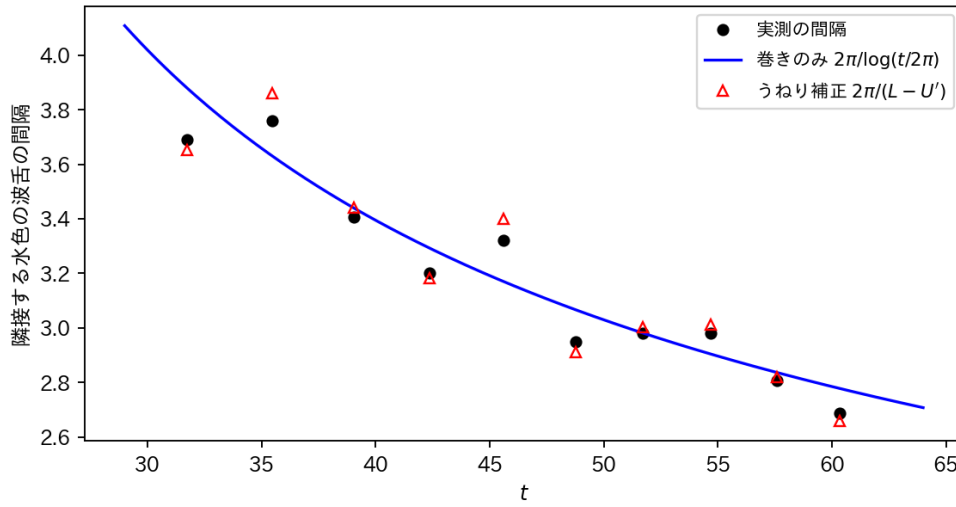


図 5 水色の波舌の間隔 ($\sigma = -2$)。巻きのための法則 $2\pi/\log(t/2\pi)$ と、うねり補正つきの式 (13) との比較。

表 1 水色の波舌の間隔 ($\sigma = -2$) と式 (13) の比較。

中点 t	実測間隔	$2\pi/L$	誤差	$2\pi/(L - U')$	誤差
31.75	3.691	3.879	+5.1%	3.682	-0.3%
39.05	3.407	3.439	+1.0%	3.433	+0.8%
42.36	3.202	3.293	+2.8%	3.186	-0.5%
48.75	2.949	3.067	+4.0%	2.927	-0.8%
60.34	2.688	2.778	+3.3%	2.663	-0.9%

5 一舌一零点

5.1 接地の追跡と本数の勘定

水色の波舌のうち、 $\theta(t_c) = (5 + \frac{1}{2})\pi$ をみたす錨点 $t_c = 40.7000$ (グラム点の中点) のものを $\sigma = -8$ から帯の中まで追跡すると、図 6 のとおり、第 7 零点 $\gamma_7 = 40.918719\dots$ にまっすぐ吸い込まれる。波

舌は「自分の」零点に接地するのである。しかも本数の勘定は式 (2) が強制する：高さ T までの水色の波舌の本数は $\theta(T)/\pi + O(1) \approx N(T)$ ，すなわち**一本の波舌に一個の零点**。水色の錨点 $\theta = (m + \frac{1}{2})\pi$ はグラム点 $\theta = m\pi$ [4] の中点に並ぶので，グラム法則「一つのグラム区間に一つの零点」は「一舌一零点」の言い換えであり，その破れ [6] は次項で数値化する「波舌と零点の対応のずれ」に他ならない。なお，同じ θ / グラム構造は，零点表の完全性を検定する Turing の方法 [12] の土台でもある。

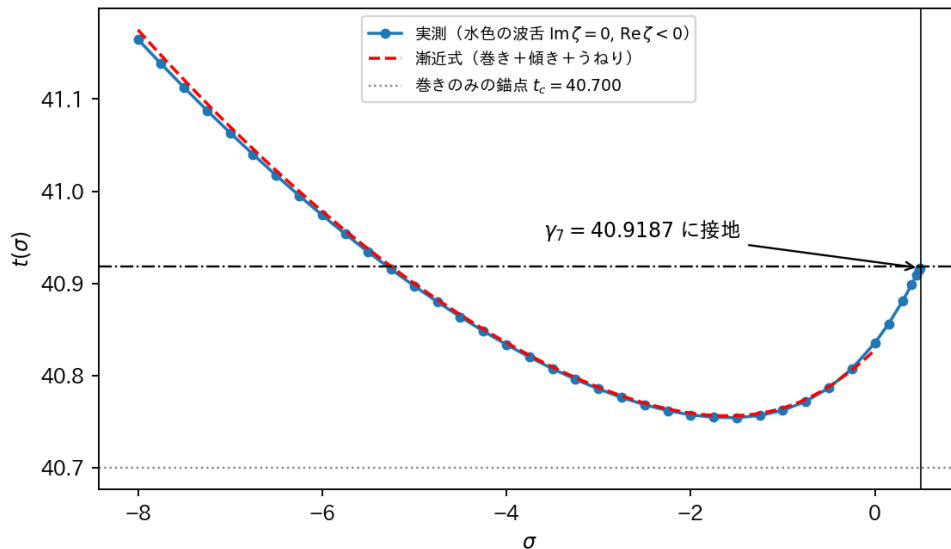


図 6 1 本の波舌の追跡 ($\sigma = -8$ から帯内まで)：左上への放物線状の反り，素数のうねり，そして $\gamma_7 = 40.918719$ への接地。

5.2 接地の向き——なぜ ζ は水色→赤， ξ は緑→青の交代なのか

単純零点の近くで $\zeta(s) \approx \zeta'(\rho)(s - \rho)$ だから，零点まわりの色相環は全体が $\arg \zeta'(\rho)$ だけ回っており，零点のすぐ上を左→右に横切る色は $[\arg \zeta'(\rho) + \pi] \rightarrow [\arg \zeta'(\rho)]$ である。すなわち「水色→赤」とは $\arg \zeta'(\rho) \approx 0$ のことであり，これは**導関数の向き**の条件であって，零点の実部 β の条件ではない。実際 $f(s) = s - (0.7 + 50i)$ は $f' = 1$ なので $\sigma = 0.7$ で完全な水色→赤の垂直接地を示す。色の組を限定しても，零点の位置を拘束する力は生じない。

それでも ζ で一様に見えるのには本当の理由がある。臨界線上の分解 $\zeta(\frac{1}{2} + it) = e^{-i\theta(t)} Z(t)$ を零点で微分すると，**厳密な向きの法則**

$$\zeta'(\rho_n) = -i e^{-i\theta(\gamma_n)} Z'(\gamma_n) \quad (14)$$

が出る。 θ は零点 1 個あたり約 π 進み， Z' の符号は交代するので，回転と反転がほぼ打ち消し合い， $\arg \zeta'(\rho_n)$ は**典型的に** 0° 付近に固定される——グラム法則と同じ現象で，ずれの大きさは $\pi \times$ (零点計数の揺らぎ) である。実測 (図 7)： $n = 1, \dots, 6$ で $+9.1^\circ, -12.6^\circ, +19.2^\circ, -30.8^\circ, +32.9^\circ, -16.8^\circ$ と漂い，グラム法則の最初の破れの付近では $n = 127$ ($\gamma \approx 282.47$) で -91.1° ， $n = 136$ ($\gamma \approx 295.57$) で $+91.2^\circ$ と 90° を超える。そこでは細かく見れば，接地の色の組はもう水色→赤ではない。 S が非有界である以上，「いずれも水色→赤」は定理ではなく典型則である。一方 ξ については同じ計算が $\arg \xi'(\rho_n) = \pm 90.0000^\circ$ の**厳密な交代**を与える (Ξ が線上で実で， Ξ' が符号交代するため)。これはメモの「緑→青/青→緑の交代」そのものであり， ζ の (ほぼ) 一定と ξ の交代は，巻き因子 $e^{-i\theta}$ の有

無という同一構造の表裏である。

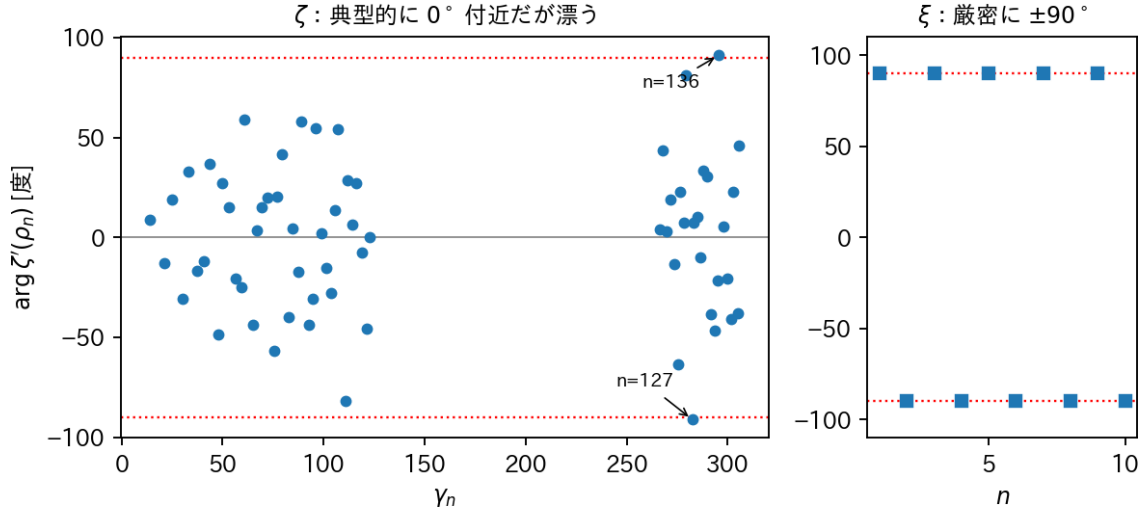


図7 接地の向き。左: $\arg \zeta'(\rho_n)$ は 0° 付近を漂い、グラム法則の最初の破れ付近 ($n = 127, 136$) で $\pm 90^\circ$ を超える。右: ξ では $\pm 90^\circ$ の交代が厳密。

6 巻きとうねりは明示公式の両辺である

6.1 巻きはアルキメデス由来

巻きの速さは複素解析一般の現象ではない。臨界線上で $\arg[\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)]$ が $\theta(t)$ の定義そのものであり、スターリングにより $\theta'(t) \approx \frac{1}{2} \log(t/2\pi)$ 。有限素数の因子は位相を有界にしか振らせない ($\sigma \geq 1 + \delta$ で $\arg \zeta$ は有界)。関数等式の χ 自体、 $\mathbb{R}$ 上のポアソン和公式に由来する。そして偏角原理により、帯の左右の縁での巻きの差が中の零点数を数える——それが式 (2) である。零点の滑らかな密度 (スペクトル的な読みでのワイル項 [25]) はアルキメデス由来で、揺らぎ S が素数の持ち分、という配役がここで決まる。なお、この零点・素数の集合対集合のフーリエ双対を一次元準結晶として読む視点は Dyson [27] による。

6.2 ヴェイユの公式を「巻きの形」で書き、検証する

偶関数 h (帯 $|\operatorname{Im} r| \leq \frac{1}{2} + \varepsilon$ で解析的・急減少) とそのフーリエ変換 $g(u) = \frac{1}{2\pi} \int h(r) e^{-iur} dr$ に対し、ヴェイユの明示公式 [11] は ($\log \pi$ の項がディガンマと打ち消し合って) 次の形に整理できる:

$$\sum_{\rho} h(\gamma_{\rho}) = h\left(\frac{i}{2}\right) + h\left(-\frac{i}{2}\right) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(r) \theta'(r) dr - 2 \sum_{n \geq 2} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} g(\log n). \quad (15)$$

読み方: 零点側 = 極 + 巻きの平均密度 + 素数の波。幅 1 のガウス窓を $T = 30$ に置き、三つの部分を独立に計算すると

$$\underbrace{1.85433523}_{\text{零点側 (40 個)}} = \underbrace{1.24686806}_{\text{巻き}} + \underbrace{0.60746717}_{\text{素数}}, \quad \text{差 } 2.6 \times 10^{-14}$$

(極の項は $O(e^{-450})$)。窓の中にたまたま零点 $\gamma_4 = 30.425$ がいる分の「余剰 +0.61」を、素数の波が正確に言い当てている。逆向きには、式 (3) を最初の 100 個の零点で評価すると素数階段が再構成され

る (図 8) : $x = 28.6/29.4$ で真値 $25.109/28.477$ に対し $24.795/28.809$ —跳び $\log 29 = 3.3673$ が波の干渉から現れる。勘定の側では

t	10^3	10^4	10^5
$N(t)$	649	10142	138069
$\theta/\pi + 1$	648.616	10142.965	138068.558
$S(t)$	+0.384	-0.965	+0.442

であり、セルバークの $\text{RMS} \approx 0.31\text{--}0.35$ と整合する。 10^5 までの零点 138069 個のうち 138068.56 個分を巻きが担い、素数の持ち分は「1 個未満のジッター」である。骨格は巻き、素数は震え。

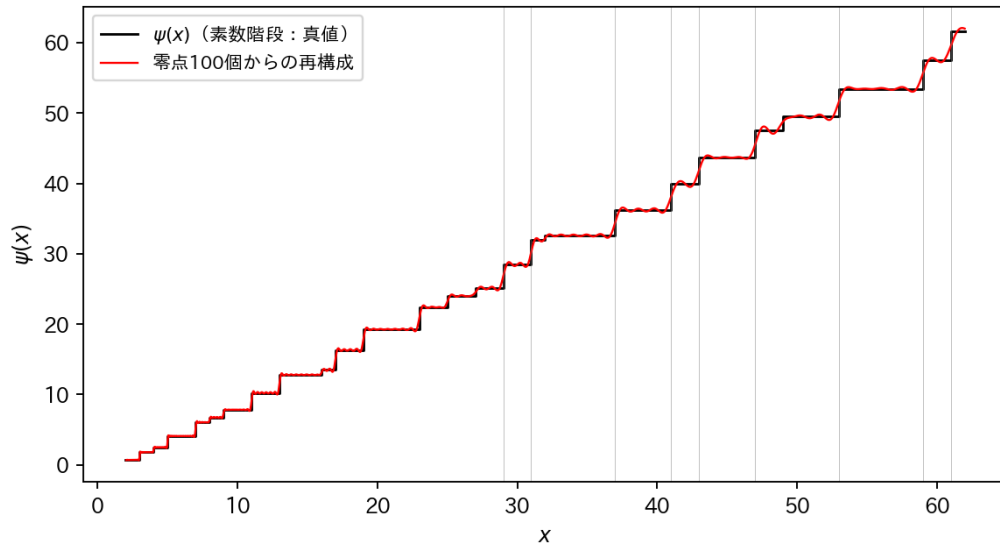


図 8 明示公式 (3) を最初の 100 零点で評価したもの。周波数 $\{\gamma_n\}$ の波の干渉が素数階段の跳びを作る。

7 臨界線はなぜ臨界なのか

$\log \zeta(\sigma + it) = \sum_{p,k} k^{-1} p^{-k\sigma} e^{-ikt \log p}$ と書く。素因数分解の一意性のおかげで周波数 $\{k \log p\}$ は $\mathbb{Q}$ 上一次独立であり、位相 $t \log p$ は独立な一様乱数のように振る舞う (クロネッカー-ワイル)。したがって分散が足し算になる：

$$\text{Var}[\log |\zeta(\sigma + it)|] \approx \frac{1}{2} \sum_p p^{-2\sigma} \quad (+\text{高次素数冪}), \quad (16)$$

そしてこの和は、素数定理の密度のもとで、ちょうど $\sigma > 1/2$ のときだけ収束する (図 9 左)。実測 ($t \in [400, 1200]$, 図 9 右) : $\sigma = 2, 1, 0.6$ で分散 0.039, 0.233, 0.735, 理論 0.039, 0.237, 0.744。 $\sigma = 0.5$ では実測 1.434 が打ち切り理論値 1.165 を既に超える—零点への潜りが裾を太らせている。線上の打ち切り和はメルテンスの定理 [2] $\sum_{p \leq X} p^{-1} = \log \log X + M + o(1)$ そのもので、 $X = 10^6$ での実測は 2.887328 対 2.887289 (差 3.9×10^{-5} ; 定理は $o(1)$ 項を含む漸近式なので、この近さは有限 X での整合を示すにとどまる)。log log—これ以上遅く発散できない速度である。

すると、 ζ が零にならないための「守り」が二つあることになる。線の右側の守り=分散の収束：揺らぎは有界な極限分布 (ボア-イエッセン [7]) に飽和する。裾は重く、 $1/2 < \sigma < 1$ で値は $\mathbb{C}$ に稠密 (ヴォロニンの普遍性 [16]) だが、 $-\infty$ (=零) に届くことこそリーマン予想が禁じる事態であり、

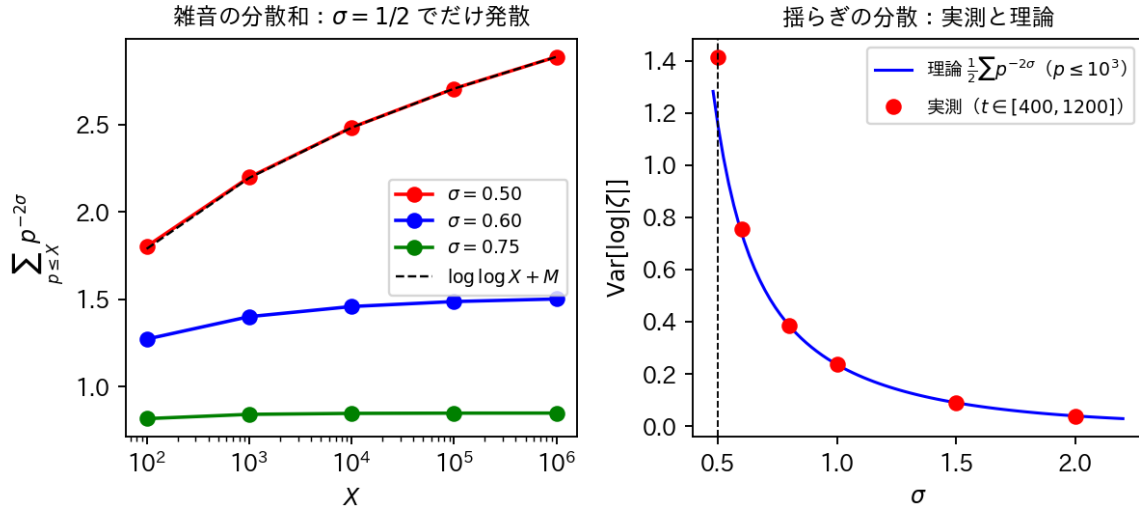


図 9 臨界性。左：素数雑音の分散和 $\sum_{p \leq X} p^{-2\sigma}$ は $\sigma = 1/2$ でだけ発散し、メルテンスの $\log \log X + M$ に従う。右：実測 $\text{Var}[\log |\zeta(\sigma + it)|]$ と $\frac{1}{2} \sum_p p^{-2\sigma}$ 。

これは $\sum \Lambda(n)n^{-s}$ が $\sigma > 1/2$ で収束することと同値である。線の左側の守り＝決定論的ドリフト：関数等式 (1) が $\log |\zeta|$ に正のドリフト $(\frac{1}{2} - \sigma) \log(t/2\pi)$ を与える。実測： $\sigma = 0.2$ で平均 1.540, 予測 1.521。そして急所は、ドリフトの係数 $(\frac{1}{2} - \sigma)$ が消えるのも ($|\chi| = 1$)、分散の収束境界も、同じ $\sigma = 1/2$ だということである。ただし二つの守りは独立ではない。関数等式により $\sigma < 1/2$ の零点は $\sigma > 1/2$ の零点と厳密に対をなすから、左の守りは右の守りの鏡像に決定論的因子 $|\chi|$ を添えた言い換えであり、また鏡映の中心が $1/2$ であることと分散境界 $2\sigma = 1$ が $1/2$ であることは、いずれも素数の密度を支配する $s = 1$ の極に帰着する。ここで計算が示しているのは「二つの偶然の一致」ではなく、一つの臨界性を二つの側面から見た姿である。さらに、分散の発散はそれ自体では零点を作らない。線上に無限個の零点が実在することは Hardy の定理 [5] であり、本節の分散の描像はそれと整合的である、というにとどまる。

8 舌先は「破れる寸前」——de Bruijn–Newman の読み

8.1 枠組みと定理

ここでの対称性は、関数等式の $\mathbb{Z}_2$ 鏡映 $s \mapsto 1 - \bar{s}$ (固定軸が臨界線) である。同じことだが、 $\Xi(t) = \xi(\frac{1}{2} + it)$ が実関数であり、その根が複素共役で対になる、と言ってもよい。零点の集合は常に対称 (必ず鏡映対で現れる)。リーマン予想は「どの零点も個別に鏡の上にいる」=秩序変数 $\delta = \beta - \frac{1}{2}$ が恒等的に 0, という対称相の主張である。制御パラメータは Ξ の熱変形 H_λ (de Bruijn[10], Newman[17]): $\lambda \geq \Lambda$ で根は全部実、 Λ より下で共役対が現れる。ここで定理を三つ並べる：

$$\begin{aligned} \text{RH} &\iff \Lambda \leq 0 \quad (\text{de Bruijn, Newman}), \\ \Lambda &\geq 0 \quad (\text{Rodgers–Tao}[30]), \quad \Lambda \leq 0.22 \quad (\text{Polymath15}[29]). \end{aligned}$$

合わせると：リーマン予想が成り立つのは $\Lambda = 0$ のとき、そのときにかぎる。すなわち ζ は相図の境界線の上、転移点ちょうどに座っている (Newman の言葉で「リーマン予想は、正しいとしても、かろうじて正しい」)。数値的には、RH は高さ $3 \cdot 10^{12}$ まで検証されている [31]。

8.2 実際の零点 60 個でのピッチフォーク

流れのもとで実根は $\dot{x}_j = \sum_{k \neq j} 2/(x_j - x_k)$ に従う。 $\{\pm\gamma_1, \dots, \pm\gamma_{60}\}$ の 120 点で λ を下げると、最小間隔の対 #34–#35 ($\gamma = 111.030, 111.875$; 間隔 0.845) が $\lambda_c \approx -0.096$ で衝突し、共役対に割れる (図 10)。実測の局所則は

$$r^2 = 7.57(\lambda - \lambda_c) \text{ [孤立対の理論値 8]}, \quad b^2 = 2.06(\lambda_c - \lambda) \text{ [理論値 2]},$$

当てはめ指数はフィット窓を変えて $\nu_{\text{実}} = 0.52 \pm 0.02$, $\nu_{\text{破}} = 0.49 \pm 0.01$ (誤差は窓の変動から推定; 系統誤差の完全な評価は行っていない), 臨界点は両側で一致 ($-0.0963 / -0.0959$), 秩序変数は $b = \sqrt{2(\lambda_c - \lambda)}$ を追う (例: 0.2026 対 0.2002)。s 平面で見れば、割れた対は高さ $t \approx 111.4$ の鏡映対 $\sigma = \frac{1}{2} \mp 0.361$ ——集合は対称のまま各員が対称性を破る, 教科書どおりの自発的 $\mathbb{Z}_2$ 破れであり, λ をさらに下げると次の対も割れ始めた。但し書き: これは有限個で打ち切った模型流であり, 局所機構 (平均場ピッチフォークの普遍形) の例示にすぎない。衝突する対が #34–#35 であることも $\lambda_c \approx -0.096$ という値も打ち切りの人工物であり, 意味を持つのは局所形 ($\sqrt{}$ 則) だけである。Λ そのものについては何も計算しておらず, 厳密な錨は上の定理群である。なお「転移点に住む」ことと整合して, 最初の 60 零点の unfold 済み隣接間隔は平均 0.986・分散 0.110——強い準位反発を示す: ポアソン (1) から遠く, 格子 (0) とも違う。ただし低高度の 59 ギャップという小標本では, GUE の値 0.178[14, 19] との差はおよそ 2 標準誤差と有限高度補正の範囲内であり, GUE の精密な検定を主張するものではない。レーマー対 [13] は衝突未遂, 対称性が最も軋む瞬間である (cf. [22])。

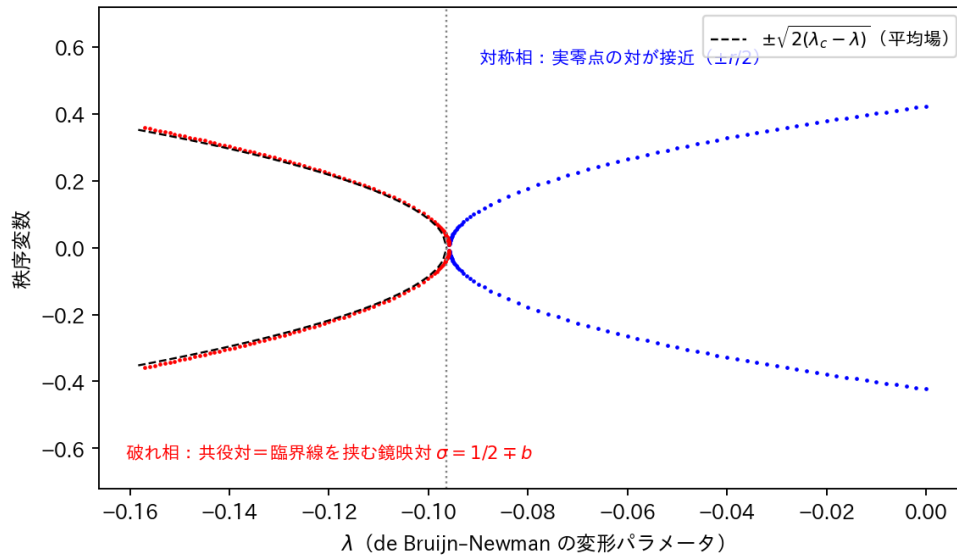


図 10 実零点 60 個での有限 N 流。最近近対が $\lambda_c \approx -0.096$ で衝突し、鏡映対 $\sigma = \frac{1}{2} \mp b$ に割れ, 平均場のピッチフォーク $b = \sqrt{2(\lambda_c - \lambda)}$ に従う (衝突する対と λ_c の値自体は打ち切りの人工物; 本文参照)。

8.3 自明な零点は凍結した対称格子

自明零点は出自からして別物である。それは $\Gamma(s/2)$ の極の裏返し——純アルキメデス的で, 素数を含まず, 完備 ξ には最初から存在しない。格子は厳密 (間隔ちょうど 2, 個数 $T/2$, 揺らぎ 0), その波

舌の位相に含まれる素数成分は 2.5% にすぎず ($s = -2 + 0.5i$ で実測 0.078 ラジアン), 色の組の規則的な交代 (図 2) は破れのない相の整った縞である。流れの絵でいえば, λ を上げたときに全根が向かう等間隔配置に, 最初から凍結して座っている——対称相の基底状態。個数は $T/2$ で育つが, 素数側には何も作らない: 予算 (3) で極が x を, 非自明零点が包絡 $\sqrt{2x} \sum |\rho|^{-2}$ の振動 ($x = 10 \rightarrow 10^4$ で $0.63 \rightarrow 20.0$) を担うのに対し, 自明零点の寄与 $\frac{1}{2} \log(1 - x^{-2})^{-1}$ は $x = 10$ で 5.0×10^{-3} , $x = 10^4$ で 5.0×10^{-9} ——消えていく真空補正である。「物質の成長」が厳密に住み着くのはむしろ極である: $\zeta(\beta)$ を primon 気体 (素数をエネルギー $\log p$ のボソンとみなす) [20, 21] の分配関数と読むと, エネルギー $U(\beta) = -\zeta'/\zeta(\beta)$ は $\beta \rightarrow 1$ で $1/(\beta - 1)$ として発散し (実測: $\beta = 1.05$ で 19.43 対 20; 1.01 で 99.42 対 100) ——ハーゲドルン点——, さらに分配関数が $\zeta(\beta)$ である Bost–Connes 系 [23] は $\beta = 1$ に本物の対称性破れの相転移を持つ (定理)。成長とその転移は極に, 鏡映の臨界は線に, 自明零点は凍った背景に。配役はこう決まる。

9 波舌の分光——実装検証と可視化

姉妹編 [32] は臨界線上で基本音 $W(t) = 2^{-1/2-it}$ を切り出した: 振幅がちょうど $2^{-1/2}$ になる唯一の素数波, 全素数スペクトルの最低周波数 $\log 2$, その下のギャップ $(0, \log 2)$ 。波舌の方程式 (7) は, これらが級数についての代数的事実にとどまらず, **波舌の測れる性質**であることを予言する: 波舌のずれ場 (その中心線の楕曲線上で測る) のスペクトルは (6) の素数の櫛であり, 最強モードは $(p, k) = (2, 1)$, その振幅はどの $\sigma < 1$ でも $2^{\sigma-1}$ (線上なら $2^{-1/2}$), そして $\log 2$ より下に線はない。本節はその測定の報告である——ただし, その科学的身分を先に明確にしておく。式 (4) は恒等式なので, 実装が正しいければ以下の測定は**失敗しえない**。したがってこれは自然の検証ではなく, 実装の検証と素数の櫛の可視化である。導出を実際に試験している内容は, むしろ式 (5) の $1/t$ 残差, 間隔則 (13), 傾き (8), そして式 (14) まわりの 90° 超えの観測 (第 5.2 節) の側にある。

方法。 $\arg \zeta(-2 + it)$ を $t \in [30, 130]$ (刻み 0.05) で標準化して巻き戻し, (7) の滑らかな部分 $-2\theta(t) + 3.125/t$ と緩やかなトレンド $a + b/t + c/t^2$ を引く。残りが位相単位の「波舌のずれ場」である。これに素数の櫛 ($n \leq 13$) を同時に最小二乗で当てはめる。同時当てはめが本質的で, 単一周波数の走査では, ギャップ内に高さ 0.027 の床が見える——これは基本音の矩形窓サイドローブ $0.217 \times 0.1256 = 0.0273$ そのものである (図 11 上段の灰色帯の注記)。

結果。 表 2 のとおり, 9 本の線がすべて理論振幅 $k^{-1}p^{k(\sigma-1)}$ と 4~5 桁で一致する。櫛を除去した残差は, 走査を $v1$ の $\omega \geq 0.30$ から $\omega = 0.10$ まで拡張しても (窓長 100 による分解能の下限は $2\pi/100 \approx 0.063$), $\sigma = -2$ で $[0.10, 0.30)$ に 7.5×10^{-7} , 全域 $[0.10, 2.72]$ で 2.3×10^{-5} 以下にとどまり, とくにギャップ $(0, \log 2)$ は分解能限界の近くまで空である (図 11 下段)。さらに同じ測定を $\sigma = -1$ と $\sigma = -4$ でも行った: 基本音の当てはめ振幅は $0.25000/0.12500/0.03125$ ($\sigma = -1, -2, -4$) となり, $2^{\sigma-1}$ 則そのものである ($v1$ は単一の σ しか試験していなかった)。残差の最大値はそれぞれ 3.9×10^{-4} ($\sigma = -1$; 打ち切った櫛の外の高次線による), 2.3×10^{-5} , 8.2×10^{-6} 。

三つの注意。(i) $n = 4$ の線は二つの正規化の区別を**可視化**する: 当てはめは $0.00781 = \frac{1}{2} \cdot 4^{\sigma-1}$ で, 式 (6) の II 型重みと一致し, 素朴なディリクレ重み $4^{\sigma-1} = 0.0156$ ではない。もっとも, この重みは $\arg \zeta$ の展開として数学的に先験的に定まっており, 測定が「決着」させたのは実装が正しい級数を読んでいることである (姉妹編 Remark 3.6 の区別の実演)。(ii) 基本音は予言どおり, どの σ でも最強の線である。周期 9.0647 は第 4.1 節で見たうねりの主波長そのもの, $\sigma = -2$ での間隔変調に占める割合は $\log 2 \cdot 2^{\sigma-1}/|\zeta'(3)| = 43.7\%$, 臨界線上の揺らぎ分散に占める割合は $\frac{1}{2}/\sum_{p \leq 10^6} p^{-1} = 17.3\%$ 。

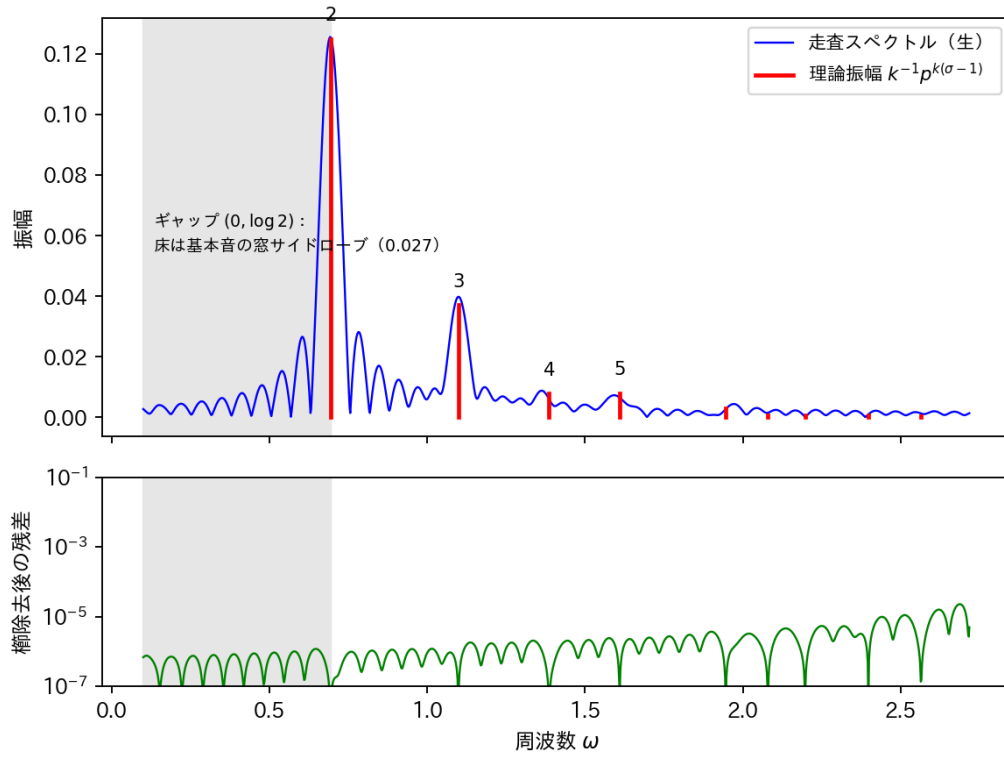


図 11 波舌の分光 ($\sigma = -2$)。上段：ずれ場の単一周波数走査と理論の素数楕 $k^{-1}p^{k(\sigma-1)}$ (赤)。ギャップ内に見える床は基本音の窓サイドローブ。下段：楕の同時除去後の残差は走査域 $[0.10, 2.72]$ 全体で $\lesssim 10^{-5}$ ，ギャップ $(0, \log 2)$ は分解能限界 ($2\pi/100 \approx 0.063$) の近くまで空。

表 2 波舌の分光 ($\sigma = -2$, $t \in [30, 130]$)。理論振幅は $k^{-1}p^{k(\sigma-1)}$ 。

$n = p^k$	周波数 $k \log p$	当てはめ振幅	理論値
2	0.69315	0.12500	0.12500
3	1.09861	0.03704	0.03704
$4 = 2^2$	1.38629	0.00781	0.00781
5	1.60944	0.00800	0.00800
7	1.94591	0.00292	0.00292
$8 = 2^3$	2.07944	0.00065	0.00065
$9 = 3^2$	2.19722	0.00069	0.00069
11	2.39790	0.00076	0.00075
13	2.56495	0.00045	0.00046

(iii) 姉妹編の問い「どの波の族でパターンは ζ 的になるか」への、現在知られている唯一の答えがここにある： ζ 自身の位相場（波舌）が、ずれのスペクトルとして素数の櫛を持つパターンである。ただしこれは ζ の自画像の分光であって、姉妹編 §7 の反応拡散系の構成ではない——その設計図は白紙のままである。

10 何が定理で、何がそうでないか

表 3 本稿の主張の身分一覧。

主張	身分
厳密な櫛の方程式 (4)	古典的恒等式； 10^{-20} で検算
櫛の漸近方程式 (7) と傾き項	初等的導出（スターリング）；数値検証
波舌の帯方程式 (9)(10)；幅の法則 (11)(12)；開き $\Delta c/m$ の楔状先端	初等的（陰関数定理・局所展開）；0.4% 以内で抜き取り検証
間隔則 (13)； $t > 4\pi$ のコヒーレンス	初等的； $\sim 1\%$ で検証
一舌一零点；錨点＝グラム中点	古典的勘定 (2)；検証
向きの法則 (14)；水色→赤の典型性	厳密恒等式；「常に」は偽 ($n = 127$)
$\arg \xi'(\rho_n) = \pm 90^\circ$ の交代	厳密 (Ξ の実性)；検証
垂直接地の局所性； $\Gamma \subseteq L$ は ζ で偽	反例を計算（第 3.4 節）
巻き形のヴェイユ公式 (15)	古典（Weil）； 10^{-14} で検証
臨界性：二つの守りが $\sigma = 1/2$ で同時に切れる	定理（セルバーグ／メルテンス）＋発見法的議論；実測一致（ただし守りは完全には独立でない：第 7 節）
$\text{RH} \Leftrightarrow \Lambda = 0$	定理 [10, 17, 30]
有限 N ピッチフォーク，指数 $\approx 1/2$	局所機構の例示； Λ の計算ではない
波舌の分光 ($\sigma = -1, -2, -4$ ；ギャップは分解能限界まで空)	実装検証と可視化；式 (4) が厳密である以上，反証可能性を持たない
線上に零点が無限個	定理（Hardy[5]）
宇宙・物質などの読み替え	類推にとどまる；第 8.3 の予算計算が配役を拘束（成長 $\leftrightarrow$ 極）
なぜ零点がその線に立つのか	開問題

あわせて、本稿で使った古典的恒等式を二つ掲げておく。ディガンマの値

$$\psi_{\Gamma}\left(\frac{1}{2}\right) = -\gamma_E - 2 \log 2 = -1.96351002602142 \dots \quad (17)$$

（ルジャンドルの倍数公式の帰結）は、巻き（アルキメデス背景）の定数と、うねりの基本周波数の 2 倍とを、臨界線のちょうど中心で一本の式に結ぶ——本稿の「巻き $\times$ うねり」の二部構成は、定数のレベルにも実在する（姉妹編の恒等式 (6)）。また鏡映対の不変量 $|2^{-s}| |2^{-(1-s)}| = \frac{1}{2}$ （すべての s で成立、釣り合い $= 2^{-1/2}$ は線上のみ）は、論理的には閉じるが、姉妹編 §6 の判定どおり $\sigma = \frac{1}{2}$ の言い換え

であり、算術的内容は運ばない。本稿は新しい数学的結果を主張しない。寄与は、整理と、初等的導出の明示と、数値実験である。

限界と再現性

(a) 分光 (第 9 節) は恒等式の実装検証であり、反証可能な実験ではない。(b) ギャップの検証は $v1$ では $\omega \geq 0.30$ に限られていた。本版では $\omega = 0.10$ まで拡張したが、窓長 100 による分解能の下限 $2\pi/100 \approx 0.063$ より下は原理的に検証できない。(c) 振幅の σ 依存則 $2^{\sigma-1}$ は $\sigma = -1, -2, -4$ の 3 点でのみ試験した。(d) ピッチフォーク指数の誤差はフィット窓の変動から推定したもので、系統誤差の完全な解析は行っていない。衝突対の同定と λ_c の値は打ち切りの人工物である。(e) 表と本文の数値は `mpmath` (8~25 桁)、図は倍精度 (`mpmath.fp`) で別個に計算した。(f) 計算は対話中の短いスクリプト群によるもので、本文の記述から再実装可能だが、コードは公開していない。(g) 参考文献の書誌事項は記憶から記したもので原典と照合しておらず、体系的な文献調査も行っていない。とくに等位曲線の解析は Arias de Reyna[26] の X 線解析と重なる可能性が高く、数値実験についても新規性は主張しない。(h) 文献 [32, 33] は非アーカイブの引用 (対話文書・一時 URL) であり、本稿の編者は AI である。外部発表の際には各媒体の規程に従う必要がある。

11 おわりに

対話者が二十年あまり位相図に見つづけてきたものは、項目ごとに、二項の台帳で読めるものだった。波舌は位相の等位線であり、その滑らかな回転はアルキメデス由来、震えは素数の波の和である。台帳は明示公式そのもの。波舌は、決定論の守りと確率論の守りが同時に切れる一本の線の上に、一本につき一個ずつ接地する。舌先は——リーマン予想が正しければ定理として——鏡映対称が破れうる境界 $\Lambda = 0$ の上に立ち、そして決して破れない。自明な零点はアルキメデスの真空の凍結格子である。そして波舌は基本音 W で実際に鳴っており、その振幅・ギャップ・倍音の重みを、第 9 節の分光は 4~5 桁で測った。

これらのどれ一つとして、「なぜ零点がその線に立つのか」を説明してはいない。振幅の釣り合い、ドリフトの消失、分散の臨界、熱流の境界——言い換えは定数 $\frac{1}{2}$ をあらゆる側から磨くが、問いには答えない。姉妹編が引いた誠実な境界線は、ここでも動かない。ただ、ひとつだけ、以前は言葉だったものが確かめられた。パターンと素数は比喻で結ばれているのではない。**波舌はパターンであり、そのスペクトルは素数の櫛であり、基本音は、算術が定めるちょうどその振幅で、そこに鳴っている。**

参考文献

- [1] B. Riemann, *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, Monatsber. Königl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (1859), 671–680.
- [2] F. Mertens, *Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie*, J. Reine Angew. Math. **78** (1874), 46–62.
- [3] H. von Mangoldt, *Zu Riemanns Abhandlung über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, J. Reine Angew. Math. **114** (1895), 255–305.
- [4] J.-P. Gram, *Note sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann*, Acta Math. **27** (1903), 289–304.
- [5] G. H. Hardy, *Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann*, C. R. Acad. Sci. Paris **158** (1914), 1012–1014.
- [6] J. I. Hutchinson, *On the roots of the Riemann zeta function*, Trans. Amer. Math. Soc. **27** (1925), 49–60.
- [7] H. Bohr and B. Jessen, *Über die Werteverteilung der Riemannschen Zetafunktion*, Acta Math. **54** (1930), 1–35.
- [8] A. Speiser, *Geometrisches zur Riemannschen Zetafunktion*, Math. Ann. **110** (1935), 514–521.
- [9] A. Selberg, *Contributions to the theory of the Riemann zeta-function*, Arch. Math. Naturvid. **48** (1946), 89–155.
- [10] N. G. de Bruijn, *The roots of trigonometric integrals*, Duke Math. J. **17** (1950), 197–226.
- [11] A. Weil, *Sur les “formules explicites” de la théorie des nombres premiers*, Comm. Sémin. Math. Univ. Lund, Tome Supplémentaire (1952), 252–265.
- [12] A. M. Turing, *Some calculations of the Riemann zeta-function*, Proc. London Math. Soc. (3) **3** (1953), 99–117.
- [13] D. H. Lehmer, *On the roots of the Riemann zeta-function*, Acta Math. **95** (1956), 291–298.
- [14] H. L. Montgomery, *The pair correlation of zeros of the zeta function*, Proc. Sympos. Pure Math. **24**, Amer. Math. Soc. (1973), 181–193.
- [15] H. M. Edwards, *Riemann’s Zeta Function*, Academic Press, New York, 1974.
- [16] S. M. Voronin, *Theorem on the “universality” of the Riemann zeta-function*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **39** (1975), 475–486.
- [17] C. M. Newman, *Fourier transforms with only real zeros*, Proc. Amer. Math. Soc. **61** (1976), 245–251.
- [18] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, 2nd ed., revised by D. R. Heath-Brown,

Oxford Univ. Press, 1986.

- [19] A. M. Odlyzko, *On the distribution of spacings between zeros of the zeta function*, Math. Comp. **48** (1987), 273–308.
- [20] B. Julia, *Statistical theory of numbers*, in *Number Theory and Physics*, Springer Proc. Phys. **47** (1990), 276–293.
- [21] D. Spector, *Supersymmetry and the Möbius inversion function*, Comm. Math. Phys. **127** (1990), 239–252.
- [22] G. Csordas, W. Smith, and R. S. Varga, *Lehmer pairs of zeros, the de Bruijn–Newman constant Λ , and the Riemann hypothesis*, Constr. Approx. **10** (1994), 107–129.
- [23] J.-B. Bost and A. Connes, *Hecke algebras, type III factors and phase transitions with spontaneous symmetry breaking in number theory*, Selecta Math. (N.S.) **1** (1995), 411–457.
- [24] J. C. Lagarias, *On a positivity property of the Riemann ξ -function*, Acta Arith. **89** (1999), 217–234.
- [25] M. V. Berry and J. P. Keating, *The Riemann zeros and eigenvalue asymptotics*, SIAM Review **41** (1999), 236–266.
- [26] J. Arias de Reyna, *X-Ray of Riemann’s zeta-function*, arXiv:math/0309433 (2003).
- [27] F. Dyson, *Birds and frogs*, Notices Amer. Math. Soc. **56** (2009), 212–223.
- [28] E. Wegert, *Visual Complex Functions: An Introduction with Phase Portraits*, Birkhäuser, 2012.
- [29] D. H. J. Polymath, *Effective approximation of heat flow evolution of the Riemann ξ -function, and a new upper bound for the de Bruijn–Newman constant*, Res. Math. Sci. **6** (2019), Paper 31.
- [30] B. Rodgers and T. Tao, *The de Bruijn–Newman constant is non-negative*, Forum Math. Pi **8** (2020), e6.
- [31] D. Platt and T. Trudgian, *The Riemann hypothesis is true up to $3 \cdot 10^{12}$* , Bull. London Math. Soc. **53** (2021), 792–797.
- [32] Toshiki Takahashi, 『臨界線上の基音 $2^{-1/2-it}$ と素数・零点双対性——チューリング・パターンの視点からの覚書——』, 2026 年 8 月 18 日 (Claude, Anthropic との対話より ; 英語版 : *The Fundamental Tone $2^{-1/2-it}$ on the Critical Line and the Prime–Zero Duality*).
- [33] 著者による ζ の位相図についてのメモ, 2026 年 8 月 15–16 日, <https://temp.potaro.org/?p=7198>, <https://temp.potaro.org/?p=7208>.