

複素平面の捻り

——極 $s = 1$ と臨界線上の零点をめぐる二つの問い——

Toshiki Takahashi*

TML independent researcher

2026 年 8 月 19 日 (2026 年 9 月 2 日訂正)

概要

姉妹編 [18] は、 $\arg \zeta$ の位相図に見える色帯を「波舌」と呼び、その位相が二つの部分——アルキメデス因子が供給する滑らかな巻きと、オイラー積が供給する素数のうねり——の和であることを示した。本稿はこの分解を土台に、著者の二つの問いを一本の計算として扱う。

第 I 部：もし極 $s = 1$ が存在しなければ、臨界線の右側は左側に返るか。 答えは「右側はすでに左側に返っており、極はその返しの装置と双子である」。(1) $\Gamma(s/2)$ の極の格子 $\{0, -2, -4, \dots\}$ ($-2, -4, \dots$ は自明零点、 $s = 0$ は $\zeta(0) = -\frac{1}{2} \neq 0$ の通常点) の鏡映 $\{1, 3, 5, \dots\}$ は空ではない。 χ の単純極が鏡映零点と厳密に打ち消し合って巻き 0 に均されており、打ち消しの相手をもたない $s = 1$ だけが極として残る (巻き -1 ; 数値検証)。(2) 極を消して Γ 因子を対称化した Z_2 では両側格子が立ち、極は最初の右自明零点に置き換わる ($Z'_2(1) = -1/(4\sqrt{\pi}) = -0.1410473959$, 理論=実測; 鏡映残差 2.3×10^{-19})。(3) 左の波舌のずれ場と鏡映点の素数場を点ごとに比べると相関 1.000000, 差は分枝を除いて RMS 2.7×10^{-5} , しかもその差は t^{-3} で消える (傾き -3.00)。左の震えは右半平面の素数場の鏡映そのものである。(4) 返された波の総強度は極と厳密に等価で、定数は $-\gamma_E$ である。(5) 返しの装置と極は、テータのモジュラー変換という一本のポアソン恒等式の二つの項である (残差 10^{-27})。(6) 実在の「極なし」であるディリクレ $L(s, \chi_5)$ では格子が右へ一つ進むだけで右側の格子は立たない：オイラー積が $\sigma > 1$ に零点を許さないからである。

第 II 部：もし非自明零点が臨界線上に並んでいなければ、複素平面の捻りは消えるか。 答えは「消えない。捻りの源が零点ではないからである」。零点を一組だけ線から外した模型 $F = \zeta \cdot G$ (関数等式・実軸対称性・零点数を厳密に保つ) で測ると、(7) 関数等式が欠陥の双極子モーメントを恒等的に禁じるため、遠方場は四重極として t^{-3} で減衰する (実測係数 -28.69 対 理論 -28.66)。(8) 壊れるのは波舌の配線である：一本の舌は $t = 38.999$ で臨界線を横断して右半平面の内側で右の零点に接地し、もう一本は左の零点を行き過ぎて $\sigma^* = 0.3725$ ——臨界線のなお左側——で折り返し、左の零点に裏側から接地する。(9) 線は接地を失い、 $|Z_F|$ は 0.0586 の床で止まる——未遂に終わるレーマー対の、完成した姿である。(10) 厳密な $\pm 90^\circ$ 交代則は補角則 $\arg \xi'(\rho_L) + \arg \xi'(\rho_R) = 180^\circ$ に置き換わり、前者は後者が線上で退化した場合と分かる。(11) 極の定数 $-\gamma_E$ は 7.3×10^{-6} しか動かない。(12) 代価は算術に出る： $\psi(x)$ の誤差項が $x^{0.8}$ で振れる。

二つの答えを合わせると一つの構図が見える。捻りは極とアルキメデス因子が作り、鏡映が返し、零点が受け止める。極を消せば右に格子が立つが素数との縁が切れ、零点を線から外せば配線が組み替わって素数階段の誤差が育つ。どちらの場合も請求書を出すのはオイラー積である。

*本稿は、2026 年 8 月 19 日の対話 (著者と Claude, Anthropic) を、同日 Claude が一本の論文の形に整理したものである。二つの問いはいずれも著者によるものであり、第 I 部の内容は同日の稿『複素平面上の極震による素数波の形成』[19] を再構成したもの、第 II 部は同日の対話の後半で新たに行った計算である。姉妹編『リーマン・ゼータ関数の「波舌」』[18] および『臨界線上の基音 $2^{-1/2-it}$ 』[17] の続編にあたり、波舌・接地・巻き・うねり・楔といった用語と記号は [18] に従う。本稿は新しい数学的結果を主張しない。第 I 部はすべて古典的事実 (関数等式、ポアソン和公式、ローラン展開、ディリクレ L 関数の初等的性質) の整理と数値検証であり、第 II 部は明示的な模型関数についての初等的計算と数値検証である。表題の「捻り」および本文の「波の返し」「反接地」「接地の裏返し」等は説明のための比喩であって、数学的主張は各節の式と数値に限られる。オイラー定数は零点の縦座標 γ_n との混同を避けて γ_E と記す。数値はすべて対話中に Python (mpmath, 作業精度 8~30 桁; numpy) で計算し、本稿のためにすべて計算し直した。参考文献の書誌事項は記憶によるもので、原典との照合は行っていない。文献 [18, 17, 19] は非アーカイブの引用であり、本稿の編者は AI である。誤りはすべて編者に帰する。2026 年 9 月 2 日訂正版：8 月 19 日版にあった誤りと矛盾を訂正した。変更点は第 21 節に一覧する。

1 序——二つの問い

姉妹編 [18] で得られた指導原理は、位相の二項分解であった。複素平面のどの縦線に沿っても、 ζ の位相は

- ・ 巻き——完備ゼータのアルキメデス因子 $\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$ が供給する、滑らかで決定論的な回転、と
- ・ うねり——オイラー積が関数等式を通して供給する、素数の波 $k^{-1}p^{k(\sigma-1)}\sin(kt\log p)$ の重ね合わせ

の和である。巻きが波舌の本数と平均間隔を決め、うねりが波舌を曲げる。そして波舌は一本につき一個、非自明零点に接地して終わる（位相図一般については Wegert [15] を参照）。

この描像を認めると、二つの素朴な問いが立つ。どちらも著者が位相図を眺めながら発したものである。

問い I. 関数等式 $\xi(s) = \xi(1-s)$ の鏡は $s \leftrightarrow 1-s$ である。左の自明零点の格子 $\{-2, -4, -6, \dots\}$ を鏡に映せば $\{3, 5, 7, \dots\}$ に、そして $\Gamma(s/2)$ の最初の極のサイト $s = 0$ ($\zeta(0) = -\frac{1}{2}$ が座る) は $s = 1$ に映るはずだが、そこには何もなくて、右半平面は一様な赤の海に見える。もし極 $s = 1$ が存在しなければ、右側にも波舌が伸びるのではないか。言い換えれば、**極があるからこそ、右側の波は左側に返されているのではないか。**

問い II. 波舌は臨界線の上で接地して終わる。もし非自明零点が臨界線上に並んでいなければ——零点の実部が $1/2$ に収まらなければ——**複素平面の捻りは消えてしまうのか。それとも別の形になるのか。**

二つは別々の問いに見えるが、同じ一つの構造の両端を突いている。極 $s = 1$ は捻りの源にあたり、零点は捻りの受け皿にあたる。だから片方を消したときに何が起きるかを計算すれば、もう片方の役割も同時に見えるはずである。本稿はその見通しのもとで、第 I 部で問い I を、第 II 部で問い II を計算に載せ、第 III 部で二つの答えを突き合わせる。

計算はすべて、姉妹編で使った道具だけで済む。すなわち関数等式、ポアソン和公式、明示公式、そして位相図の巻き数である。

第 I 部

もし極 $s = 1$ が存在しなければ、臨界線の右側は左側に返るか

2 鏡映格子は空ではない——中和されている

まず、右半平面が「一様な赤の海」に見えることの内訳を確かめる。関数等式を

$$\zeta(s) = \chi(s)\zeta(1-s), \quad \chi(s) = \pi^{s-1/2} \frac{\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})} \quad (1)$$

の形に書く。分子の $\Gamma(\frac{1-s}{2})$ は $\frac{1-s}{2} = 0, -1, -2, \dots$ で単純極をもつ。これはちょうど、 $\Gamma(s/2)$ の極の格子 $\{0, -2, -4, \dots\}$ の鏡映格子 $s = 1, 3, 5, 7, \dots$ である。したがって各サイトでの ζ の姿は、 χ の極と $\zeta(1-s)$ の値との積として決まる（表 1）。

読み方はこうである。 $s = 3, 5, 7, \dots$ では、 χ の極が鏡映零点 $\zeta(-2) = \zeta(-4) = \dots = 0$ と厳密に打ち消し合い、巻き数 0 の通常点に均される。ところが $s = 1$ だけは相手が $\zeta(0) = -\frac{1}{2} \neq 0$ で、打ち消しが発生しない。 χ の極がそのまま表に出る——これが ζ の極である。

位相図で見ると、 $s = 1$ にも各色象限の楔が一本ずつ集まっている。ただし巻きが -1 なので色の順序が逆で、姉妹編 [18] 第 3.3 節でいう平面唯一の「反接地」になっている（図 1a の白星）。

したがって問い I の第一の答えはこうなる。右側の波舌は「どこかへ行った」のではない。鏡映格子の最初のサイトは極に占有され、残りのサイトは打ち消しで巻きごと均されて、そこにある。

表 1 鏡映格子の各サイトで何が起きているか。巻き数は半径 0.3 の円周に沿う $\Delta \arg / 2\pi$ の実測（400 点）。

サイト s	$\zeta(1-s)$	$\chi(s)$	$\zeta(s)$ での姿	巻き数（実測）
1	$\zeta(0) = -\frac{1}{2} \neq 0$	単純極	極（反接地）	-1.0000
3	$\zeta(-2) = 0$	単純極	通常点 $\zeta(3) = 1.2020569$	-0.0000
5	$\zeta(-4) = 0$	単純極	通常点 $\zeta(5) = 1.0369278$	-0.0000
7	$\zeta(-6) = 0$	単純極	通常点 $\zeta(7) = 1.0083493$	-0.0000

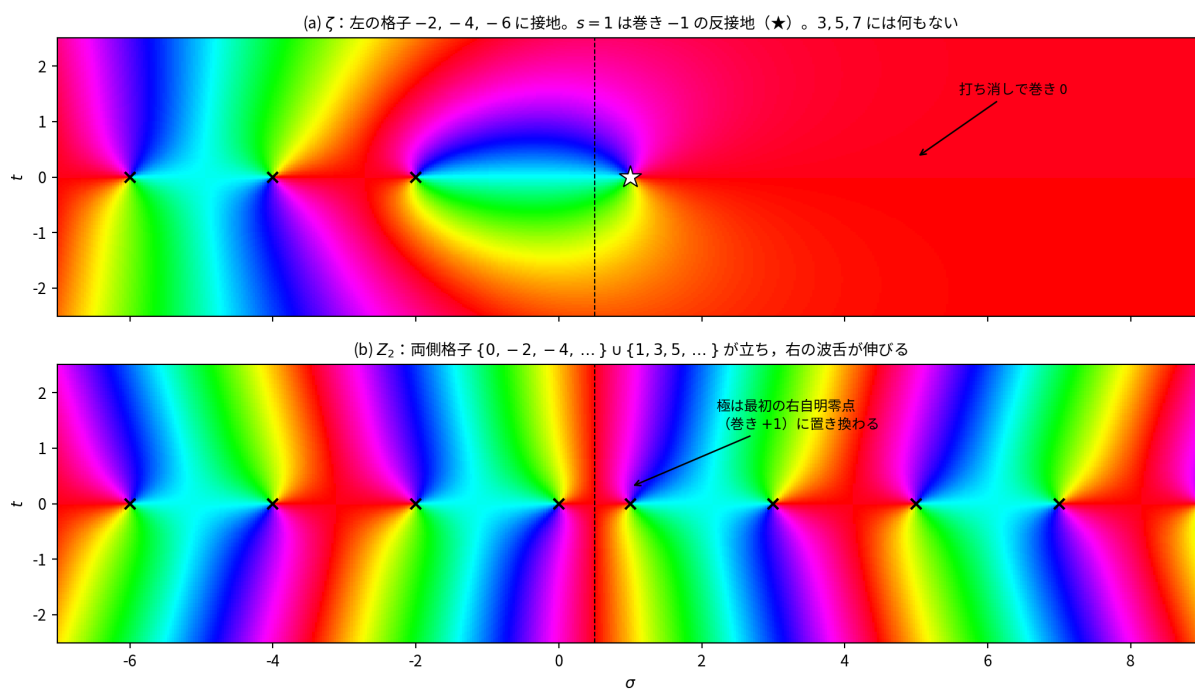


図 1 実軸近傍の比較。色相は偏角（赤 = 0, 水色 = π ）。(a) ζ : 左の格子 $-2, -4, -6$ に接地する波舌。 $s = 1$ は巻き -1 の反接地 (★) で、 $3, 5, 7$ は打ち消しにより巻き 0 の通常点になっている。(b) Z_2 : 両側格子が立ち、極は最初の右自明零点 $s = 1$ （巻き $+1$ ）に置き換わる。 $s = 0$ も自明零点として復活する。右の波舌は左の鏡像で、赤と水色は固定、緑と青が交換されている。

3 極を消した世界—— Z_2 では右の格子が立つ

3.1 構成と検証

では、極を実際に消してみるとどうなるか。極を消し、かつ Γ 因子を鏡映対称にした関数

$$Z_2(s) := \frac{\xi(s)}{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{1-s}{2})} = \frac{\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\zeta(s)}{\Gamma(\frac{1-s}{2})} \quad (2)$$

を考える。 Z_2 は整関数で、鏡映対称 $Z_2(s) = Z_2(1-s)$ をみたす（無作為の 6 点で残差 2.3×10^{-19} ）。非自明零点は ζ と共有し、自明零点は両側格子

$$\{0, -2, -4, \dots\} \cup \{1, 3, 5, 7, \dots\}$$

をもつ（ $0 \leftrightarrow 1$, $-2 \leftrightarrow 3$, $-4 \leftrightarrow 5$ と、 $\frac{1}{2}$ について完全に対称）。数値では $Z_2(0) = Z_2(1) = Z_2(3) = Z_2(5) = Z_2(7) = Z_2(-2) = Z_2(-4) = 0$, 巻き数は $s = 1$ でも $s = 3$ でも $+1$ （ ζ では -1 と 0 ）である。すなわち極は最初の右自明零点に置き換わり、 ζ では極の鏡映に食われていた $s = 0$ も自明零点として復活する。

導関数も理論値と一致する：

$$Z_2'(1) = -\frac{1}{4\sqrt{\pi}} = -0.1410473959 \quad (\text{理論値} = \text{実測値}, 10 \text{桁}),$$

$$Z_2'(3) = +0.323811, \quad Z_2'(5) = -0.592753, \quad Z_2'(7) = +1.15592.$$

符号が交代するのは左格子の $\zeta'(-2n)$ の交代則の鏡像であり、右のサイトでも色の組が交互に入れ替わることを意味する（図 1b）。

3.2 右の波舌はどう伸びるか

$Z_2(s) = Z_2(1-s)$ と実軸上の実性から、上半平面では

$$\arg Z_2(1-\sigma+it) = -\arg Z_2(\sigma+it) \quad (3)$$

が成り立つ。つまり右半分は左半分の鏡映であり、色相だけが反転している：赤（0）と水色（ π ）は固定され、緑（ $\pi/2$ ）と青紫（ $3\pi/2$ ）が入れ替わる。右の波舌は $1, 3, 5, 7, \dots$ から $\sigma \rightarrow +\infty$ へ、同じ高さでの間隔も厚さも左と変わらずに伸びる（図 1b, 図 2）。

反射公式 $1/\Gamma(\frac{1-s}{2}) = \Gamma(\frac{1+s}{2}) \sin(\frac{\pi(1-s)}{2})/\pi$ を代入すれば、 $\sigma > 1$ での厳密な楕の方程式が、姉妹編 [18] 式 (4) の完全な鏡像として得られる：

$$\arg \Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right) + \arg \sin\left(\frac{\pi(1-s)}{2}\right) + \arg(s(s-1)) - \frac{t}{2} \log \pi + \arg \zeta(s) \equiv c \pmod{2\pi}. \quad (4)$$

$\sin(\pi(1-s)/2)$ の符号は奇数 $1, 3, 5, \dots$ を通るたびに反転し、右のサイトごとの色の組の交代を作る。左で $\sin(\pi s/2)$ が偶数サイトについて果たしていた役割の、そのまま鏡写しである。

うねりについても同じことが言える。 $\sigma > 1$ では $\arg \zeta(s) = -\sum_{p,k} k^{-1} p^{-k\sigma} \sin(kt \log p)$ が絶対収束し、鏡映点 $\sigma \leftrightarrow 1-\sigma$ で振幅は $p^{k(\sigma-1)} \leftrightarrow p^{-k\sigma}$ と厳密に一致する。したがって右の波舌は、左とまったく同じ素数の楕、同じ基音 $\log 2$ でうねる。傾き項 $\sigma(\sigma-1)/2$ はもともと $\sigma \leftrightarrow 1-\sigma$ で不変だから、右の舌は（左上ならぬ）右上へ同じ放物線状に反る。

鏡映対が臨界線に出会う仕方。 対称化の帰結として、接地の描像を変える点の一つ明示しておく。式 (3) と実軸上の実性から $Z_2(\frac{1}{2}+it) = \Xi(t)/|\Gamma(\frac{1}{4}+\frac{it}{2})|^2$ は実である。すなわち臨界線そのものが、零点ごとに色を変えながら、赤の芯と水色の芯を交互になす。したがって線上の零点では水色と赤の枝は縦（線に沿う向き）に出て、緑と青の枝が横に出る。左から来た水色の芯は零点に横から入ることができず、線上の $\arg Z_2$ の鞍点（ $Z_2 < 0$ となる隣接零点間の区間における $Z_2(\frac{1}{2}+it)$ の極値）で右から来た鏡像の芯と出会い、合流した芯が線に沿ってその区間の両端の二つの零点へ向かう（図 2 の □）。一組の鏡映対が二個の零点を受けもつわけである。本数もこれと合う： $\sigma = -2$ に沿って $\Delta \arg Z_2(-2+it) \approx -\theta(t) \approx -\pi N(t)$ であり、これは ζ の $-2\theta(t)$ の半分だから、同じ高さで Z_2 の左の波舌は ζ の半数であり、残りの半数が右から来る。

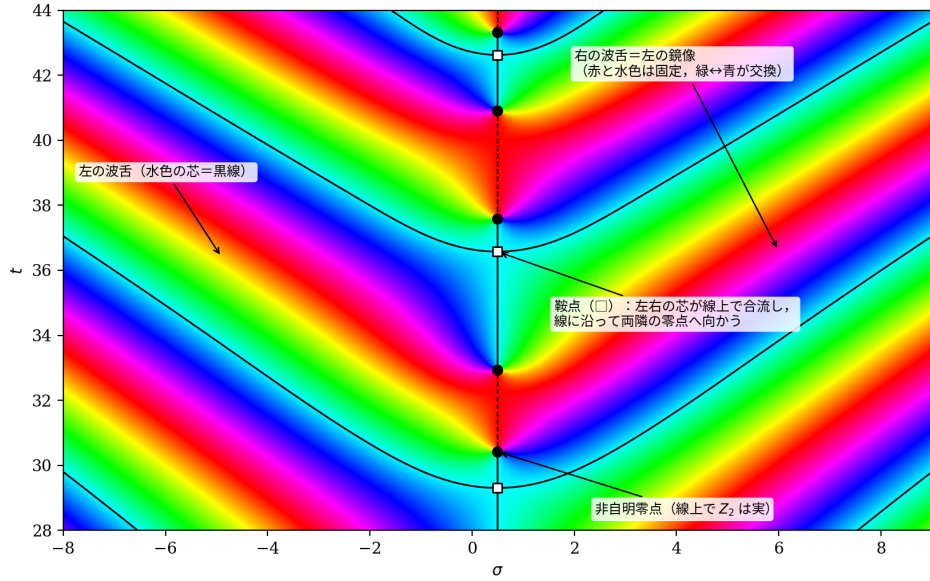


図2 Z_2 の位相図 ($t \in [28, 44]$)。黒線は水色の芯 $\{\text{Im} = 0, \text{Re} < 0\}$ 。左右の波舌が鏡映対をなして臨界帯に流れ込む。 Z_2 は臨界線上で実なので、線そのものが零点 (黒点) の間で赤と水色を交互になす：鏡映対の水色の芯は隣接する二つの零点の間の鞍点 (□; $t = 29.31, 36.58, 42.62$) で線に出会い、合流した芯が線に沿ってその二つの零点へ向かう (零点の緑・青の枝は横向き)。右の波舌は緑と青が入れ替わった左の鏡像である (訂正版で描き直した図)。

4 波の返し——比喻ではなく等式として

ここまでは「右側の格子はどうなっているか」という問いだった。問い I の後半——**極が右側の波を左側に返しているのではないか**——を、比喻でなく等式として照合する。

姉妹編 [18] の漸近櫛方程式は、左の波舌のうねりが $U(\sigma, t) = \arg \zeta(1-s)$ であることを言う。すなわち左のうねりは、右半平面 (オイラー積が絶対収束する、いわば素数の母国) の位相相を、関数等式が鏡映 $s \mapsto 1-s$ で返したもののはずである。これを点ごとに確かめる。

$t \in [30, 130]$ (刻み 0.05, 2001 点) で

$$L(t) := [\text{unwrap } \arg \zeta(-2+it)] - \left[-2\theta(t) + \frac{3.125}{t} \right], \quad R(t) := -\arg \zeta(3+it)$$

と置く。 L は左の波舌のずれ場 ($\sigma = -2$ で巻きと傾きを除去したもの; 項 $3.125/t = [\sigma(\sigma-1)/2 + \frac{1}{8}]/t|_{\sigma=-2}$ は、 $\arg \chi(\sigma+it)$ の $-2\theta(t)$ に続くスターリング展開の第一補正項である), R は鏡映点 $\sigma = 3$ の素数場の符号反転である。結果は次のとおりである (図 3)。

- 相関係数 1.000000。分枝定数は $\text{mean}(L-R)/2\pi = 2.999997$, すなわちちょうど $2\pi \times 3$ 。
- $2\pi \times 3$ を除いた差の RMS は 2.72×10^{-5} ($t = 30$ で 1.11×10^{-4} , $t = 130$ で 1.36×10^{-6})。
- その差の冪則フィットは傾き -2.999 ——スターリング展開の高次項 $O(t^{-3})$ そのものであり、素数成分は完全に一致している。

これは姉妹編 [18] 式 (7) の検証を「鏡映の等式」として読み直したものであって独立の新事実ではないが、左の波舌の震えは、右半平面の素数場を関数等式が鏡映で返したものにほかならないという主張の、最も直接的な表示である。振幅の対応 $p^{k(\sigma-1)} = p^{-k(1-\sigma)}$ も、同じ等式の別の顔である。

5 極は、返された波の総強度である

返される波の集団としての強さを $s \rightarrow 1^+$ で測る。von Mangoldt 重みでは $\sum_n \Lambda(n)n^{-s} = -\zeta'/\zeta(s)$ であり、 ζ のローラン展開 $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma_E + O(s-1)$ から

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \frac{1}{s-1} \rightarrow -\gamma_E \quad (s \rightarrow 1^+) \quad (5)$$

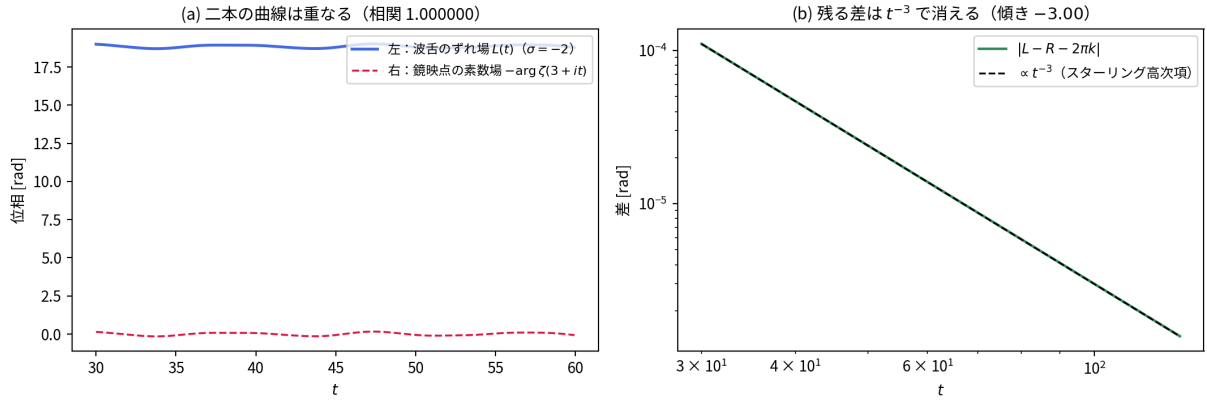


図3 波の返しの照合。(a) 左の波舌のずれ場 $L(t)$ と鏡映点の素数場 $-\arg \zeta(3+it)$ は重なって区別できない（相関 1.000000）。(b) 分枝を除いた差は t^{-3} で消える——残るのはアルキメデスの高次項だけである。

が従う。実測は次のとおりである。

s	$-\zeta'/\zeta(s)$	$1/(s-1)$	差
1.5	1.5052354	2	-0.4947646
1.2	4.4583372	5	-0.5416628
1.1	9.4410364	10	-0.5589636
1.05	19.432034	20	-0.5679658
1.02	49.426515	50	-0.5734853
1.01	99.424655	100	-0.5753454

極限 $-\gamma_E = -0.5772157$ へ線形に収束し、局所傾きの実測 0.1865 は理論値 $\gamma_E^2 + 2\gamma_1 = 0.1875462$ ($\gamma_1 = -0.0728158$ はスティルチェス定数) とよく合う。すなわち素数波の総和の対数発散は、留数ちょうど 1 の単純極と厳密に等価であり、その定数項はオイラー定数 $-\gamma_E$ という閉じた形で書ける。

素数のみの重みでも同じことが起きる。素数ゼータ $P(s) = \sum_p p^{-s}$ について

$$P(s) - \log \frac{1}{s-1} \rightarrow M - \gamma_E = -0.3157185 \quad (6)$$

($M = 0.2614972$ はメルテンス定数 [2]) であり、実測は $s = 1.1, 1.01, 1.001, 1.0001$ で $-0.19374, -0.30252, -0.31439, -0.31559$ と極限に向かう (図 4)。傾きの極限は $\gamma_E + \sum_p \frac{\log p}{p(p-1)} = 0.577216 + 0.755366 = 1.332581$ である。

臨界線でこの極の対数を読んだ姿が、姉妹編 [18] 第 7 節のメルテンスの $\log \log$ ——「これ以上遅く発散できない速度」——である。「素数の震えが平面全体に及び、線の上で底に触れられるだけの強さをもつ」ことの解析的な保証は、この極に刻まれている。

6 鏡映と極は、ポアソン恒等式の双子である

ここまでで、右の波が左へ返されていること (第 4 節) と、返された波の総強度が極に等しいこと (第 5 節) が別々に確かめられた。この二つが同じ一本の式の二つの項であることを見るのが本節である。

テータ級数 $\omega(x) = \sum_{n \geq 1} e^{-\pi n^2 x}$ のモジュラー変換 (ポアソン和公式そのもの)

$$\omega\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{x} \omega(x) + \frac{\sqrt{x}-1}{2} \quad (7)$$

を数値検証すると、 $x = 0.5, 0.25$ で残差はそれぞれ $3.3 \times 10^{-27}, 8.1 \times 10^{-28}$ である。この一本の式の二つの項が、二つの役を演じる。 $\sqrt{x}$ の因子が $s \leftrightarrow 1-s$ の鏡映——第 4 節で照合した「波を返す装

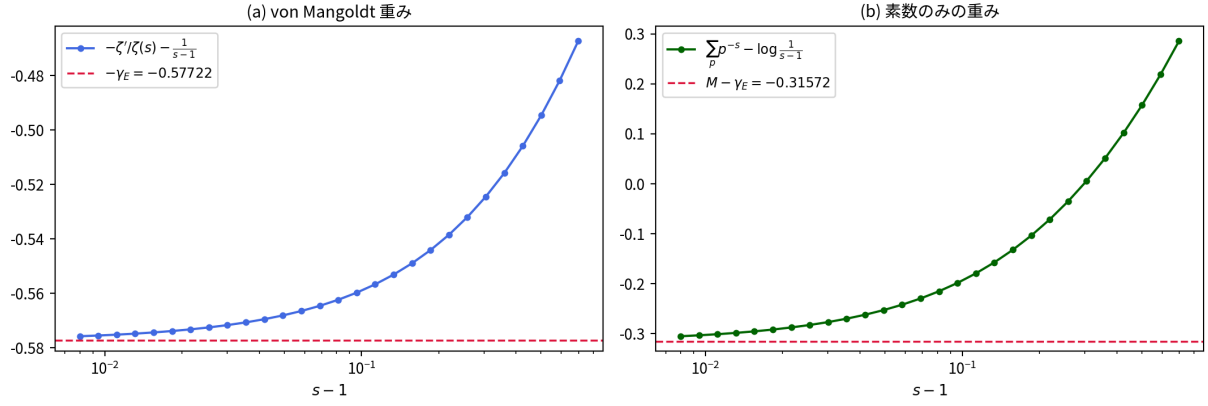


図4 極＝総強度。(a) $-\zeta'/\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ は $s \rightarrow 1$ で $-\gamma_E$ へ線形に収束する。(b) 素数のみの $\sum_p p^{-s} - \log \frac{1}{s-1}$ は $M - \gamma_E$ へ収束する。

置」——を作り、定数項 $\frac{\sqrt{x}-1}{2}$ （ポアソン和の $n=0$ 項の代償）が極を作る。実際、リーマンの積分表示 [1, 9]

$$\pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty (x^{s/2-1} + x^{(1-s)/2-1}) \omega(x) dx \quad (8)$$

は $s = 0.6 + 7i$ と $s = -1.3 + 2.4i$ で残差 2.1×10^{-28} , 2.0×10^{-27} で成立する。右辺第2項（返された波の対称積分）は明示的に $s \leftrightarrow 1-s$ 対称であり、極の対 $\frac{1}{s(s-1)}$ もまた $s \leftrightarrow 1-s$ 対称である。ゼータの完備化は「対称な波の積分＋対称な極の対」に分解し、両者は同じポアソン恒等式から同時に出てくる。極と鏡映は別々の役者ではなく、一つの恒等式の双子の出力である。

この分解は臨界線の中心で最も鮮やかに見える。 $s = \frac{1}{2}$ では

$$\pi^{-1/4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \zeta\left(\frac{1}{2}\right) = -3.97697 = \underbrace{-4.00000}_{\text{極の対 } 1/(s(s-1))} + \underbrace{+0.02303}_{\text{対称積分}}$$

すなわち完備ゼータの中心値は極の項でほぼ言い尽くされ、波の積分は値の 0.58% を担うにすぎない（図5）。

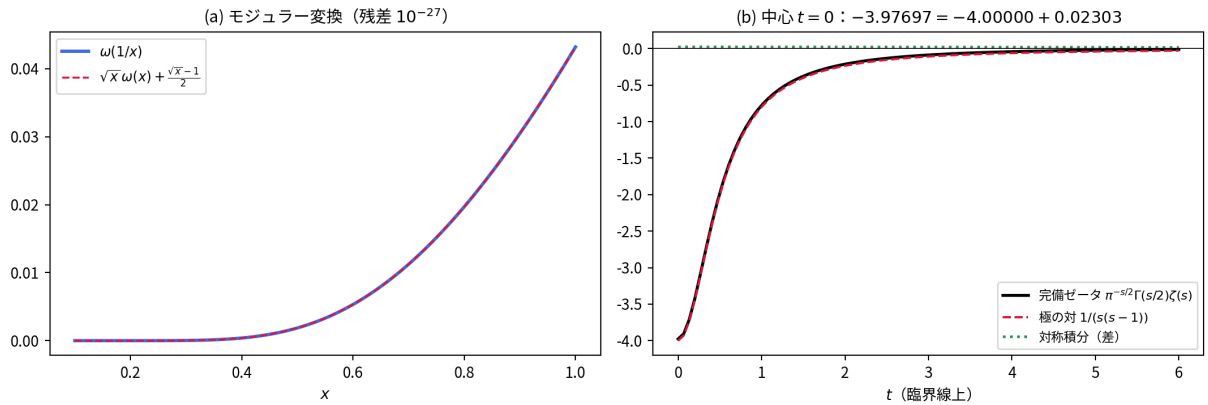


図5 ポアソン恒等式の双子。(a) モジュラー変換の両辺は重なる（残差 10^{-27} ）—— $\sqrt{x}$ の因子が鏡映を、定数項が極を作る。(b) 臨界線上の完備ゼータ（黒）＝極の対（赤破線）＋対称積分（緑点線）。中心では極の項が値のほとんどを担う。

7 実在の「極なし」との対照——格子は一サイトだけ進む

Z_2 は設計物である。では、実在する「極のないゼータ」——原始的な非主指標のディリクレ $L(s, \chi)$ ——では何が起きるか。答えは右の格子は立たず、格子が右へ一サイトだけ進むである。

偶指標 ($\chi(-1) = 1$) の完備化は $\Gamma(s/2)$ 因子をもち、極の対 $s(s-1)$ をもたない。そのため、 ζ では極の鏡映 $s = 0$ に食われていた自明零点が現れる： $L(0, \chi) = 0$ 。実例として法 5 の実偶指標 χ_5 (平方剰余指標) をとり、フルヴィッツゼータ表示 $L(s, \chi_5) = 5^{-s} [\zeta(s, \frac{1}{5}) - \zeta(s, \frac{2}{5}) - \zeta(s, \frac{3}{5}) + \zeta(s, \frac{4}{5})]$ から計算すると

$$L(0, \chi_5) = -6.5 \times 10^{-27} \approx 0, \quad L(-2, \chi_5) = 1.0 \times 10^{-26}, \quad L(-4, \chi_5) = -6.3 \times 10^{-26}$$

(厳密には $\zeta(0, a) = \frac{1}{2} - a$ より $\frac{3}{10} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{3}{10} = 0$)。一方 $s = 1$ は通常点で

$$L(1, \chi_5) = 0.43040894 = \frac{2}{\sqrt{5}} \log \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (\text{古典値と 8 桁一致}),$$

$L(3, \chi_5) = 0.854825$, $L(5, \chi_5) = 0.965668$ と、 $1, 3, 5, \dots$ に零点はない (図 6)。

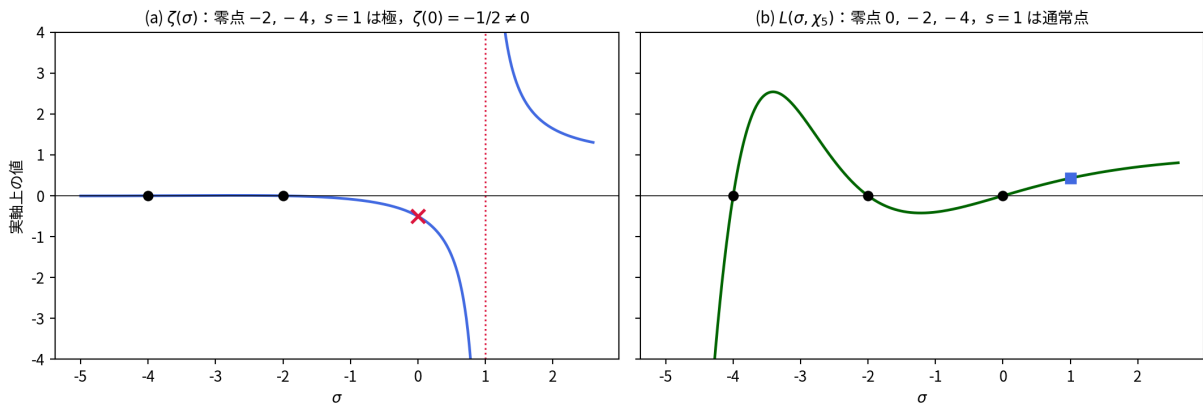


図 6 実軸上の比較。(a) $\zeta(\sigma)$: 零点は $-2, -4$, $s = 1$ は極 (点線), $\zeta(0) = -\frac{1}{2} \neq 0$ ($\times$)。 (b) 極のない $L(\sigma, \chi_5)$: 零点は $0, -2, -4$ と格子が右へ一つ進み, $s = 1$ は通常点 (■)。右側に零点はない。

右の格子が立たない理由は根本的である。 $\sigma > 1$ で絶対収束するオイラー積をもつ関数は、そこに零点を——自明であれ——一切置けない。したがって右側の自明零点は、右半平面でのオイラー積 (素数との結びつき) を放棄することと引き換えでしか得られない。 Z_2 はまさにその設計物であり (セルバーグ族には属さない), ζ の Γ 因子が片側だけにあるのは、素数の側からの要請なのである。まとめれば：

極の除去が買えるのは鏡映サイト $s = 0$ の一個だけである。右の格子全体は、 Γ 因子の対称化 = 右半平面で素数との縁を切ることの対価である。

そして ζ の極は、オイラー積の発散点 $\sum_p p^{-1} = \infty$ の境界標として、除去されずにそこに立っている。

8 第 I 部の答え

問い I——もし極 $s = 1$ が存在しなければ、臨界線の右側は左側に返るか——への答えを、四つの文にまとめる。

1. 右の格子はすでにそこにある。鏡映格子 $\{1, 3, 5, \dots\}$ は空ではなく、 χ の極と鏡映零点の厳密な打ち消しによって巻き 0 に均されている。最初のサイトだけは打ち消しの相手をもたず、極として残っている。
2. 極を消せば右の波舌が立つ。 Z_2 では極が最初の右自明零点に置き換わり (巻き $-1 \rightarrow +1$)、右の波舌は色相を反転した左の完全な鏡像として伸びる。 Z_2 は臨界線上で実なので、左の波舌とその鏡像は隣接する二つの零点の間で線に出会い、その二つの零点を共同で受けもつ。
3. そして右の波は、実際に左へ返っている。左の波舌の震えは、右半平面の素数場を関数等式が鏡映で返したものと、相関 1.000000 で一致する。残る差はアルキメデスの t^{-3} だけである。
4. 返し装置と極は双子である。 $\sqrt{x}$ が鏡映を作り、同じ式の定数項が極の対を作る。返された波の総強度は、留数 1 と定数 $-\gamma_E$ という形で極に刻まれている。

すなわち、極は「右側の波舌を消している」のではない。極は、右側の波を左側へ返す装置と同じ恒等式から生まれた双子であり、返された波の総強度そのものである。そして極を消そうとすれば、代価は素数との縁で支払われる。

第 II 部

もし非自明零点が臨界線上に並んでいなければ、複素平面の捻りは消えるか

9 問いを計算に翻訳する——最小の反例模型

第 I 部では、捻りの源を極の側に見た。第 II 部では受け皿の側、すなわち零点を動かす。

問いをそのまま計算にかけることはできない。 ζ の零点を手で動かすことはできないからである。そこで次のように翻訳する：零点を一組だけ線から外し、それ以外は ζ と厳密に同じにした関数を作る。関数等式・実軸対称性・零点の総数はすべて保つ。そのうえで、位相図・零点計数・明示公式の収支が ζ とどこで違うかを測る。

つまり「 ζ が反例をもつとしたら」ではなく、「反例をもつ関数の位相図はどう見えるか」を計算する。前者は証明の問題であり、本稿は何も述べない。後者は絵と数の問題であり、最後まで計算できる。

9.1 構成

第 6 零点と第 7 零点を $\gamma_6 = 37.5861781588\dots$, $\gamma_7 = 40.9187190121\dots$ とし、その中間の高さ $t_c = (\gamma_6 + \gamma_7)/2 = 39.2524485855\dots$ に、臨界線を挟む鏡映対

$$\rho_L = \frac{1}{2} - \delta + it_c, \quad \rho_R = \frac{1}{2} + \delta + it_c, \quad \delta = 0.3$$

を置く。有理式

$$G(s) = \frac{(s - \rho_L)(s - \rho_R)(s - \bar{\rho}_L)(s - \bar{\rho}_R)}{(s - \rho_6)(s - \rho_7)(s - \bar{\rho}_6)(s - \bar{\rho}_7)}, \quad \rho_n = \frac{1}{2} + i\gamma_n \quad (9)$$

を使って

$$F(s) := \zeta(s) G(s) \quad (10)$$

と定める。 G の極は ζ の零点の位置にちょうど乗っているので約分され、 F は $s = 1$ の単純極を除いて ζ と同じ範囲で正則である。 F の零点は、 ρ_6, ρ_7 を鏡映対に取り替えたものであり、それ以外（自明零点も、他のすべての非自明零点も）は ζ と完全に一致する。 Z_2 と同じ意味での設計物である。

9.2 何が保たれているか

(i) 関数等式。四つの零点も四つの極も $\{\rho, \bar{\rho}, 1 - \rho, 1 - \bar{\rho}\}$ という形をしているので $G(s) = G(1 - s)$ が恒等式として成り立ち、 $F(s) = \chi(s)F(1 - s)$ が ζ とまったく同じ形で成立する。実測（作業精度 25 桁、4 点）：相対残差 $1.5 \times 10^{-25} \sim 5.2 \times 10^{-25}$ 。

(ii) 実軸対称性。 G の零点・極は複素共役で対をなすので $F(\bar{s}) = \overline{F(s)}$ であり、 $\Xi_F(t) = \xi_F(\frac{1}{2} + it)$ は実関数である（ $\xi_F(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)F(s)$ ）。実測： $t \in [36.5, 42.5]$ で $|\operatorname{Im} Z_F|/|Z_F| \leq 2.0 \times 10^{-25}$ 。ただし $Z_F(t) = e^{i\theta(t)}F(\frac{1}{2} + it) = Z(t)G(\frac{1}{2} + it)$ 。

(iii) 巻き数。半径 0.12 の円周で測ると F は ρ_L, ρ_R でともに +1、元の ρ_6, ρ_7 では 0 である。新しい零点はどちらも単純零点であり、姉妹編 [18] 第 3.3 節の楔則——色象限ごとに開き角 90° の楔が一本ずつ、計四本——はそのまま成り立つ。零点の近傍の絵は ζ のそれと区別がつかない。

(iv) 零点の総数。第 12.2 節で見るように、高さで測った零点の総数は変わらない。

一方、保たれていないものが一つある。 F はオイラー積をもたない。 G は素数と何の関係もない有理式だからである。第 I 部第 7 節で見たとおり、これは偶然ではなく構造的な事情であり、第 14 節と第 18 節で正面から扱う。

10 局所像——接地の裏返し

図 7 が全体像である。左右で色帯の数も間隔も変わっていない。変わったのは、波舌がどこへ落ちるか、である。

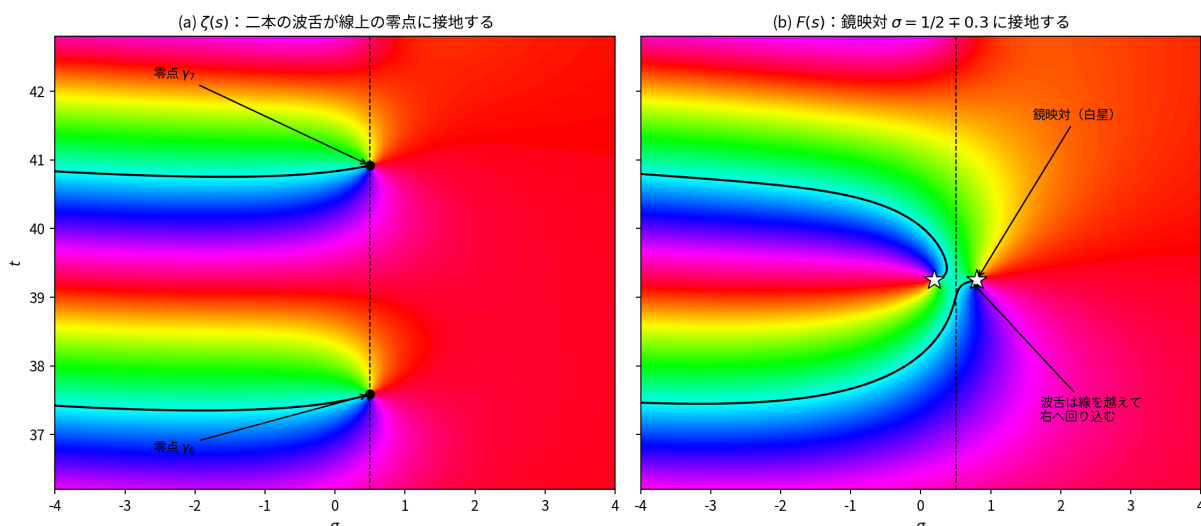


図 7 位相図の比較。黒線は水色の芯 $\{\text{Im} = 0, \text{Re} < 0\}$ 。(a) ζ ：二本の波舌が左から流れ込み、臨界線上の γ_6, γ_7 にまっすぐ接地する。(b) F ：下の波舌は臨界線を横断して右半平面へ入り ρ_R に接地する。上の波舌は ρ_L を行き過ぎ、臨界線に達する前に折り返して ρ_L に右側から接地する（白星は鏡映対）。

ζ (図 7a) では、 γ_6 と γ_7 に向かう二本の水色の舌が、臨界線に対してほぼ垂直に接地して終わる。線の右側に水色の芯はない。実際、窓 $t \in [36.6, 42.4]$ で $\sigma = 0.52, 0.6, 0.7, 0.8, 1.0, 1.5$ を走査しても、 ζ の水色の芯は一本も見つからない（曲線 $\text{Im} \zeta = 0$ は Speiser [5] が調べた古典的対象であり、Arias de Reyna [14] の「X 線」でもある）。

F (図 7b, 拡大が図 8) では、同じ二本の配線が変わる：一本は線を横断し、もう一本は自分の零点を行き過ぎて線の手前で折り返す。表 2 が各 σ での水色の芯の高さである。

読み取れる筋書きは次のとおりである（図 8 の番号に対応）。

1. 上の舌は行き過ぎて折り返す。左から流れ込んだ上の波舌は、 $\sigma = 0$ ではまだ $t = 40.03$ にあるが、そこから急に下り、左の零点 ρ_L ($\sigma = 0.2$) の上を通り過ぎて、 $\sigma^* = 0.37254$ (二分法で 10^{-5} まで詰めた値) で折り返す。 σ^* は臨界線のなお左側である： $\sigma = 0.45$ では芯は一本しか残っていない（表 2）から、この舌は $\sigma = \frac{1}{2}$ に達しない。
2. そして左の零点に裏側から接地する。折り返した舌は左向きに戻り、 $\rho_L = 0.2 + it_c$ に右側から落ちる。 ζ では波舌は必ず左から零点に入るから、これは位相図の局所的な向きが裏返ったことを意味する。
3. 下の舌は線を横断する。下の波舌は $t = 38.9992$ でちょうど臨界線を横切る。
4. そして右の零点に接地する。横断した舌は $\rho_R = 0.8 + it_c$ へ落ちる。右半平面への侵入の深さは、当然ながらちょうど $\delta = 0.3$ である。舌は零点まで届かなければならないからである。

零点そのものの近傍は、第 9.2 節 (iii) で見たとおり ζ と区別がつかない。楔は四本、開き 90° のままである。破れているのは零点と零点の間の配線である。 ζ では「一本の舌に一個の零点」という対応が、舌の側からも零点の側からも一意に読める（[18] 第 5.1 節）。 F でも数は合っているが、どの舌がどの零点に落ちるかを追うには、線を横断する経路（下の舌）か、零点を行き過ぎて折り返す経路（上の舌）をたどらなければならない。

表2 水色の芯 $\{\text{Im} = 0, \text{Re} < 0\}$ の高さ t (窓 $t \in [36.6, 42.4]$)。 ζ では二本が線まで来て終わる。 F では $\sigma = 0.2$ の先で三本に分かれ、 $\sigma^* = 0.37254$ で二本が合流して消え、残る一本が $\sigma = 0.8$ まで達する。「—」はその σ で走査していないことを、「なし」は走査したが芯がなかったことを表す。

σ	ζ の芯	F の芯
-4.0	37.420, 40.834	37.464, 40.796
-2.5	37.358, 40.768	37.462, 40.678
-1.0	37.371, 40.762	37.666, 40.471
0.0	37.472, 40.835	38.163, 40.031
0.25	—	38.434, 39.267, 39.755
0.35	—	38.594, 39.334, 39.548
0.45	37.572, 40.909	38.827
0.52	なし	39.066
0.70	なし	39.227
0.775	なし	39.241
0.80	なし	なし (ρ_R に接地して終わる)

言い換えれば、リーマン予想が破れたときに位相図で真っ先に壊れるのは、零点の絵ではなく、**零点へ至る道筋の絵**である。

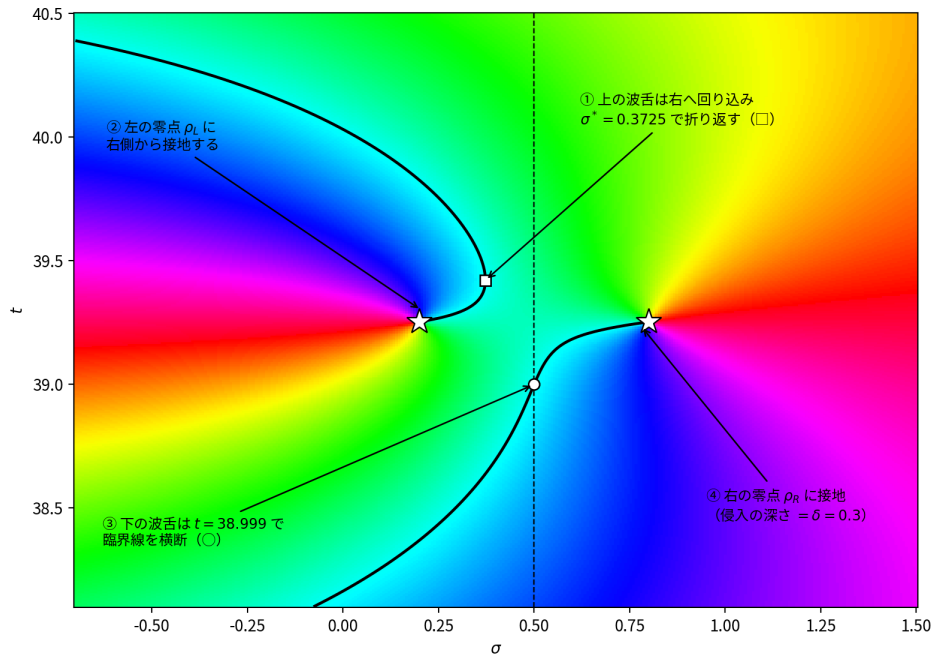


図8 F の位相図の拡大。上の波舌は ρ_L を行き過ぎ、 $\sigma^* = 0.3725$ (□; 臨界線の左側) で折り返して、左の零点 ρ_L に右側から接地する。下の波舌は $t = 38.999$ で線を横断し (○), 右の零点 ρ_R に接地する。侵入の深さは $\delta = 0.3$ 。

11 接地の向き—— $\pm 90^\circ$ 則は補角則の退化した場合である

姉妹編 [18] 第 5.2 節は、接地の向きについて二つのことを示した。 ζ については $\arg \zeta'(\rho_n)$ が 0° 付近を漂う典型則にとどまるが、完備ゼータ ξ については $\arg \xi'(\rho_n) = \pm 90.0000^\circ$ という厳密な交代が成り立つ。これはミが線上で実であることの帰結である (本稿でも ρ_6 について -90.0000° を再現した)。

零点が線を離れると、この法則はどうか。答えは、消えるのではなく、より広い法則に置き換

わる，である。 $\xi_F(s) = \xi_F(1-s)$ を微分すると $\xi'_F(1-s) = -\xi'_F(s)$ であり， $\rho_R = 1 - \overline{\rho_L}$ だから

$$\xi'_F(\rho_R) = -\overline{\xi'_F(\rho_L)} \implies \begin{cases} \arg \xi'_F(\rho_L) + \arg \xi'_F(\rho_R) \equiv 180^\circ \\ |\xi'_F(\rho_L)| = |\xi'_F(\rho_R)| \end{cases} \quad (11)$$

が厳密に従う。実測は

$$166.1419627^\circ + 13.85803732^\circ = 180.0000000^\circ, \quad \frac{|\xi'_F(\rho_L)|}{|\xi'_F(\rho_R)|} = 1.0000000$$

である。鏡映対をなす二つの接地は，強さが厳密に等しく，向きが補角をなす。

そして $\delta \rightarrow 0$ の極限では $\rho_L = \rho_R = \rho$ となり，この式は $2 \arg \xi'(\rho) \equiv 180^\circ$ ，すなわち $\arg \xi'(\rho) = \pm 90^\circ$ に退化する。姉妹編で「厳密な交代則」として現れたものは，**零点が線の上にいる場合に限って成り立つ補角則の縮退形**だったことになる。位相図の言葉でいえば， ξ の接地が緑→青と青→緑を律儀に交代するのは，鏡映対が一点に重なっているからである。

なお F 自身については $\arg F'(\rho_L) = 165.641^\circ$ ， $\arg F'(\rho_R) = -12.111^\circ$ であり，こちらには単純な法則はない。 ζ と同じく，巻き因子 $e^{-i\theta}$ の有無が両者を分けている。

12 臨界線は接地を失う——完成したレーマー対

12.1 Z の符号交代が消える

$G(s) = G(1-s)$ と実軸対称性から， G は臨界線上で実である（実測： $|\operatorname{Im} G|/|G| \leq 8.1 \times 10^{-32}$ ）。したがって $Z_F(t) = Z(t)G(\frac{1}{2} + it)$ は実関数どうしの積である。ここで $G(\frac{1}{2} + it)$ は $t = \gamma_6$ と $t = \gamma_7$ に単純極をもち，その間で符号が負になる。 Z の符号交代はちょうどこの二点で起きるから，極と符号交代が正確に打ち消し合い， Z_F は符号を変えない。

数値がこれを裏づける（図 9）。 $|Z_F|$ は $t = 39.255431$ で最小値 0.0586426 をとるが，そこで零に触れない。近傍の典型値 ($|Z| \sim 1.8$) の 3.2% まで下がって，そこで持ち上がる。

これはレーマー対 [8, 12] の絵そのものである。レーマー対とは，二つの零点が異常に接近して Z の極値が零線をかすめる現象であり，姉妹編 [18] 第 8.2 節では「衝突未遂，対称性が最も軋む瞬間」と書いた。本稿の模型は，その衝突が**完成した場合**である。二つの零点が実際に衝突し，臨界線を挟む鏡映対へ割れると，線の上に残るのは零に届かない浅い谷だけになる。

第 I 部第 5 節で見た「線の上で底に触れられる強さ」という言い方を借りれば，反例とは，線がその一点だけ底に触れ損なうことである。

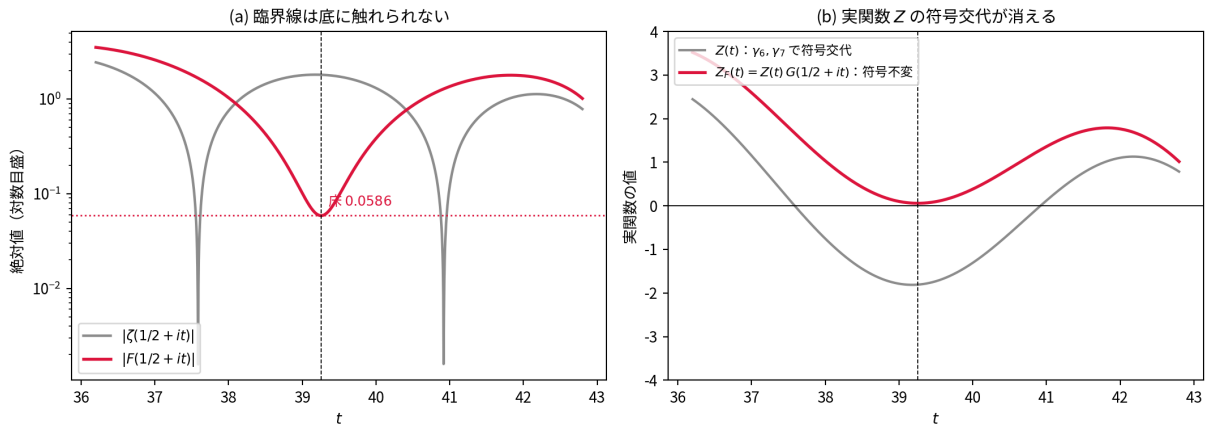


図 9 完成したレーマー対。(a) $|zeta|$ は γ_6, γ_7 で零に触れるが， $|F|$ は 0.0586 の床で止まる。(b) 実関数として見ると， G の極が Z の符号交代をちょうど打ち消し， Z_F は符号を変えない。

12.2 巻きは無傷で、ずれは $S(T)$ が負う

零点の総数はどうか。 $N(T) = \theta(T)/\pi + 1 + S(T)$ [11] の巻き項 $\theta(T)/\pi$ は Γ 因子だけで決まるので、 F でも ζ でも同じである。差は S に出る。 $S_F - S_\zeta = \frac{1}{\pi} \arg G$ を、 $s = 2$ から $2 + iT$ を経て $\frac{1}{2} + iT$ に至る標準の経路で連続的に追うと、

$$N_F(T) - N_\zeta(T) = \begin{cases} -1 & (\gamma_6 < T < t_c) \\ +1 & (t_c < T < \gamma_7) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

となる（実測： $T = 38.0, 39.0$ で -1.0000 ； $T = 39.5, 40.0$ で $+1.0000$ ； $T = 36.0, 42.0$ で 0 ）。

すなわち、零点は消えても増えてもいない。二つの零点が同じ高さ t_c に集まったぶん、計数関数が一時的に 1 だけ遅れ、そのあと 1 だけ進む。姉妹編 [18] 第 6.2 節では、 S の典型的な大きさは $\sqrt{\log \log T}$ 程度（セルバーグ [6]），高さ 10^5 までで「一個未満のジッター」だと計算した。反例が一つあると、そこに幅 $\gamma_7 - \gamma_6$ の単位の箱が立つ。これは素数の揺らぎが作れる大きさではあるが、作りにくい形である。

13 遠方場——捻りは四重極であり、すぐに減衰する

問い II の核心は「捻りは消えるか」であった。ここで逆の可能性——捻りがかえって平面全体に広がるのではないか——も含めて、遠方場を計算しておく。

$|s| \rightarrow \infty$ で

$$\log G(s) = -\frac{M_1}{s} - \frac{M_2}{2s^2} - \frac{M_3}{3s^3} - \dots, \quad M_k = \sum_{\text{零点}} \rho^k - \sum_{\text{極}} \rho^k \quad (12)$$

である。ここで決定的なのは M_1 である。関数等式を保つ配置替えでは、零点も極も $\{\rho, \bar{\rho}, 1 - \rho, 1 - \bar{\rho}\}$ という四つ組で動く。この四つ組の和は実部だけが残って必ず 2 になるから、

$$M_1 = \sum \text{零点} - \sum \text{極} = 2 - 2 = 0 \quad (13)$$

が恒等的に成り立つ（実測もちょうど 0）。つまり、鏡映対称性そのものが、欠陥の双極子モーメントを禁じている。捻りが遠くまで届かないのは偶然ではない。

残る最初の項は四重極である。

$$M_2 = 4\delta^2 + (\gamma_7 - \gamma_6)^2 = 0.360000 + 11.105829 = 11.465829, \quad M_3 = 17.198743. \quad (14)$$

興味深いのは、 M_2 の 96.9% が縦方向の項 $(\gamma_7 - \gamma_6)^2$ だということである。鏡映対は同じ高さに並ばなければならないから、零点を線から外す操作は必ず高さの配置替えを伴う。捻りの主成分は「横にずらすこと」ではなく「縦に寄せること」である。

σ を固定して $t \rightarrow \infty$ とすると

$$\arg G(\sigma + it) \simeq \frac{M_2\sigma - M_3/3}{t^3} \quad (15)$$

となり、 $\sigma = -2$ では係数 -28.66457 を予言する。実測は $t = 800, 1600, 3200$ で $\arg G \cdot t^3 = -29.081, -28.768, -28.690$ で、たしかに予言値に収束している（図 10a）。

遠方が静かでも、近くは動く。表 2 から、波舌の位置のずれは $\sigma = -1$ で 0.30, $\sigma = -2.5$ で 0.10, $\sigma = -4$ で 0.04 である。この高さでの波舌の間隔は $2\pi / \log(t/2\pi) \approx 3.4$ だから、 $\sigma = -2.5$ ではずれは間隔の 3%, $\sigma = -4$ では 1% にすぎない。姉妹編 [18] 第 4.1 節が測った素数のうねりの大きさ（ $\sigma = -2$ で間隔変動の 11%）と比べると、反例一つの影響は、左へ数単位進むだけで素数の震えの中に埋もれてしまう。

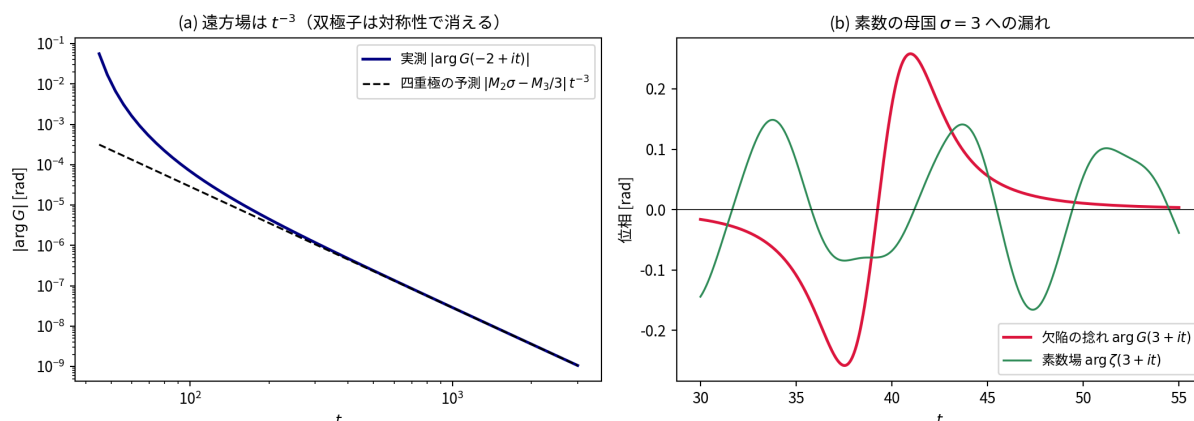


図 10 捻りの届く範囲。(a) 遠方場は t^{-3} で落ち、係数は四重極の予言 $M_2\sigma - M_3/3$ に一致する。(b) 素数の母国 $\sigma = 3$ では、欠陥の捻り（赤、最大 0.258 rad）が素数場そのもの（緑、RMS 0.089 rad）を上回る。

14 素数の母国への漏れ——そしてそれが模型の影であること

$\sigma > 1$ では $\arg \zeta$ はオイラー積で完全に決まる。ところが模型では、 $G(s) = G(1-s)$ ゆえに $|\arg G(3+it)| = |\arg G(-2+it)|$ であり、その最大値は 0.2581 rad ($t \approx 41$) に達する。同じ場所での素数場の RMS は 0.0885 rad だから、欠陥の捻りは素数場の 2.9 倍である（図 10b）。位相図でいえば、第 I 部で見た「一様な赤の海」に、素数では作れない形の膨らみが乗る。

しかしここは慎重に読まなければならない。この漏れは**模型の性質であって、リーマン予想が破れた ζ の性質ではない**。本物の ζ は、零点がどこにあるとオイラー積をもつ。したがって $\sigma > 1$ の位相場は、反例があってもなくても素数の櫛のままである。漏れ口は、最初から塞がっている。

では捻りはどこへ行くのか。オイラー積は、 $\sigma > 1$ の位相に出るはずだった歪みを、**素数階段の誤差項へ振り替える**。これが次節の主題である。第 I 部第 7 節は、極を消そうとすると右半平面で素数との縁を切る代価を払わされる、と述べた。本節の計算はその双対にあたる：零点を線から外そうとすると、代価はオイラー積の側では払えず、算術の側で払われる。

15 算術の代価——明示公式の予算

本節だけは模型 F の係数の話ではなく、「 ζ の零点が動いたと仮定したとき、明示公式の収支がどうなるか」という古典的な計算である（この論理の切り替えは第 18 節で改めて注意する）。

明示公式 [1, 3]

$$\psi(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \log 2\pi - \frac{1}{2} \log(1-x^{-2})$$

で、零点 $\rho = \beta + i\gamma$ は振幅 $2x^{\beta}/|\rho|$ の振動を供給する。 $\beta = 1/2$ なら $\sqrt{x}$ 、 $\beta = 0.8$ なら $x^{0.8}$ である。

x	鏡映対の項 $2x^{0.8}/ \rho_R $	線上の項 $2\sqrt{x}/ \rho_7 $	比
10^2	2.03	0.489	4.15
10^4	80.7	4.89	16.5
10^6	3214	48.9	65.8

姉妹編 [18] 第 8.3 節では、 $x = 10^4$ における全非自明零点の振動の包絡を $\sqrt{2x \sum |\rho|^{-2}} = 20.0$ と計算した。反例が一組あるだけで、その項は 80.7——全零点の合唱の 4.0 倍になる。

図 11 は、最初の 100 個の零点で零点和を評価し、 $\sqrt{x}$ で規格化したものである。 ζ の零点では $[10, 10^5]$ で最大 0.569 に収まるのに対し、一組を鏡映対に置き換えた場合は最大 1.841 に達し、包絡 $2x^{0.3}/|\rho_R|$ にきれいに沿って育つ。 $x = 10^{12}$ ならこの包絡 $2x^{0.3}/|\rho_R|$ は 200 を超える。

これは「リーマン予想 $\iff \psi(x) = x + O(x^{1/2+\varepsilon})$ 」という古典的同値の、一つの零点だけを取り出した姿にほかならない。位相図の側で見れば波舌の配線が組み替わるだけの小さな出来事が、算術の側では素数の分布そのものの誤差の桁を変える。捻りは平面には残らず、数の並びに残る。

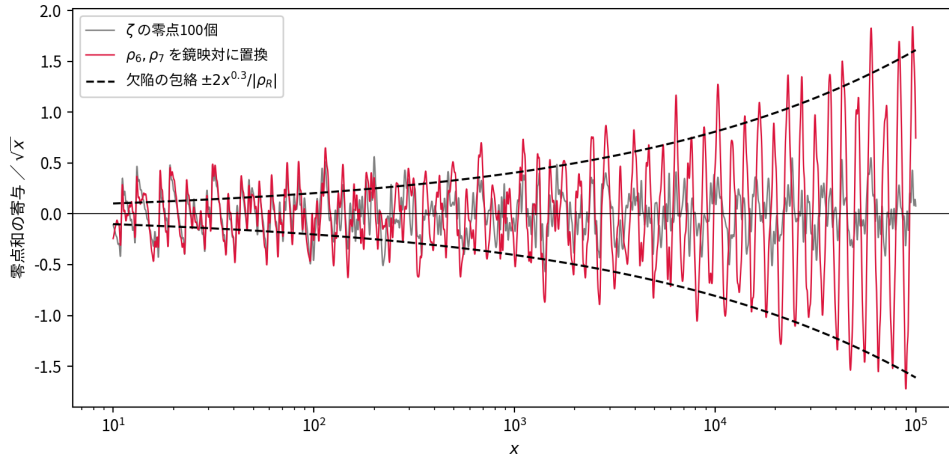


図 11 明示公式の予算。零点 100 個で評価した零点和を $\sqrt{x}$ で割ったもの。ζ の零点 (灰) は有界にとどまるが、一組を鏡映対に置き換えると (赤) 欠陥の包絡 $\pm 2x^{0.3}/|\rho_R|$ に沿って育つ。

16 極は気づかない——そして相図の中での位置

第 I 部第 5 節で、素数波の総強度が $-\gamma_E$ という閉じた形をもつことを確かめた。零点を一組動かすと、この定数はどれだけ動くか。 $-F'/F = -\zeta'/\zeta - G'/G$ だから、極限は $-\gamma_E - (G'/G)(1)$ に移る。実測：

$$G(1) = 1.0037292, \quad (G'/G)(1) = -7.262 \times 10^{-6}, \quad -\gamma_E - (G'/G)(1) = -0.5772084.$$

ずれは 7.3×10^{-6} , γ_E の 0.0013% である。 $s \rightarrow 1^+$ の実測列 ($s = 1.05, 1.01, 1.002$ で $-0.567958, -0.575338, -0.576833$) は、第 I 部第 5 節の表の値と小数第 4 位まで一致する。留数はちょうど 1 のままであり、素数定理の主要項 $\psi(x) \sim x$ も動かない。

理由は簡単で、欠陥が高さ 39 にあり、極 $s = 1$ から遠いからである。第 13 節の四重極の減衰則が、そのまま極の側から見た姿になっている。第 I 部で調べた「極震」の等式は、線の上の局所的な破れに対して頑健である。反例は極を揺らさない。

最後に、姉妹編 [18] 第 7 節の「二つの守り」との関係を確認しておく。 $\sigma = 0.8$ では

$$\text{素数雑音の分散 } \frac{1}{2} \sum_{p \leq 10^6} p^{-1.6} = 0.3674 \text{ (有限)}, \quad \text{ドリフト } \left(\frac{1}{2} - 0.8\right) \log \frac{t_c}{2\pi} = -0.5496$$

である。分散は有限であり、ボーア-イエッセンの極限分布 [4] は密度をもつから、 $\log |\zeta|$ が $-\infty$ (= 零) に届く確率は 0 である。模型 F は、この「確率 0 の事象」を手で起こしている。したがって本稿の計算は、反例がありそうにないことの説明にはなっても、ありえないことの証明には一切ならない。

de Bruijn-Newman の熱流 [7, 10] の言葉でも位置を確認しておく。平均場のピッチフォークでは秩序変数が $b = \sqrt{2(\lambda_c - \lambda)}$ に従う ([18] 第 8.2 節)。 $b = \delta = 0.3$ とすれば $\lambda_c - \lambda = 0.045$ であり、系は転移点の内側、対称性が破れた相に 0.045 だけ踏み込んでいることになる。定理 RH $\iff \Lambda \leq 0$ と $\Lambda \geq 0$ (Rodgers-Tao [16]) を合わせれば、リーマン予想が成り立つのは $\Lambda = 0$ のとき、そのときに限る。反例があるとは、 ζ が転移点ちょうどに座っているのではなく、破れ相の内部に落ちているということである。ただしこれは局所的な平均場の対応にすぎず、 Λ そのものは計算していない。

17 第 II 部の答え

問い II——もし非自明零点が臨界線上に並んでいなければ、複素平面の捻りは消えるか——への答えを、やはり四つの文にまとめる。

1. **捻りは消えない。** 巻きはアルキメデス因子が供給するものであって、零点が供給するものではない。波舌の本数も間隔も、 ζ とまったく変わらない。
2. **捻りは広がりもしない。** 関数等式が欠陥の双極子モーメントを恒等的に禁じるので、遠方場は四重極として t^{-3} で落ちる。左へ数単位進めば、捻りは素数のうねりの中に埋もれる。極の定数 $-\gamma_E$ に至っては 10^{-5} の桁でしか動かない。
3. **壊れるのは配線である。** 下の波舌は臨界線を横断して右半平面の内側で右の零点に落ち、上の波舌は左の零点を行き過ぎて、臨界線に達する前の $\sigma^* = 0.3725$ で折り返し、その零点に裏側から接地する。線そのものは接地を失い、 $|Z_F|$ は零に届かない浅い床で止まる。接地の向きを支配していた $\pm 90^\circ$ 則は、補角則に置き換わる。
4. **代価は算術に出る。** $\sqrt{x}$ で規格化した素数階段の誤差が $x^{0.3}$ で育ち始める。

要するに、零点は捻りの源ではなく受け皿である。受け皿を動かしても捻りは消えない。消えないことの帳尻が、素数の並びの側で合わされる。

第 III 部

二つの答えを合わせる

18 一つの構図

二つの問いは、別々の答えを持ちながら、同じ一つの構図に収まる。

捻りは誰が作るか。 極とアルキメデス因子である。ポアソン恒等式の定数項が極を作り、 Γ 因子が巻きを供給する。第 I 部第 5 節で見たとおり、極の留数 1 と定数 $-\gamma_E$ は、返された素数波の総強度そのものであった。

捻りは誰が返すか。 鏡映である。同じポアソン恒等式の $\sqrt{x}$ の因子が $s \leftrightarrow 1-s$ を作り、右半平面の素数場を左へ返す。第 I 部第 4 節の相関 1.000000 が、その返しの直接の測定である。

捻りは誰が受け止めるか。 零点である。波舌は一本につき一個の零点に接地して終わる。だから零点を動かしても捻りは消えず、接地の仕方だけが変わる——これが第 II 部の答えであった。

そして二つの部が同じ形の結論に至っていることに注意したい。どちらの「もし」も、最後にはオイラー積が請求書を出す。

極を消す代価。 極の除去が買えるのは鏡映サイト $s=0$ の一個だけである。右の格子全体を立てるには Γ 因子の対称化が必要で、それは右半平面で素数との縁を切ることを意味する（第 I 部第 7 節）。

零点を動かす代価。 位相の側では捻りは局所的に組み替わるだけで済む。しかしオイラー積は $\sigma > 1$ の位相に歪みを通さないで、歪みは素数階段の誤差項 $x^{0.8}$ に振り替えられる（第 II 部第 15 節）。

第 I 部の Z_2 は「素数との縁を切れば、右にも格子と波舌が立つ」ことを示した。第 II 部の F は「素数との縁を保ったまま零点を動かせば、位相図はほとんど無傷で、代わりに素数の分布が壊れる」ことを示した。二つを並べると、 ζ の形が二重に締め上げられていることが見える。位相図の左右非対称

（右に格子がないこと）はオイラー積が要求し、零点が線に並ぶことは——もし本当に並んでいるのなら——素数階段の $\sqrt{x}$ 精度が要求している。極と零点は、同じオイラー積という一つの拘束の、二つの端点なのである。

もちろん、これは「なぜ零点がその線に立つのか」の説明ではない。姉妹編 [18] が引いた誠実な境界線は、ここでも動かない。本稿が付け加えられたのは、その問いの周りの地形図を、二つの「もし」の方向から測っておくことだけである。

19 何が定理で、何がそうでないか

表 3 本稿の主張の身分一覧。

主張	身分
第 I 部	
鏡映格子の中和 (χ の極と鏡映零点の打ち消し; $s = 1$ のみ極として残存)	古典 (関数等式の初等的帰結); 巻き数を数値検証
Z_2 の諸性質 (整・鏡映対称・両側格子・ $Z'_2(1) = -1/(4\sqrt{\pi})$ ・符号交代・臨界線上での実性)	初等的; 10^{-19} 級で数値検証
右の波舌の伸び方 (色相反転つき鏡像・右の楕方程式・振幅の鏡映一致)	初等的 (反射公式); 図で例証
波の返しの照合 (相関 1.000000, 残差 $\propto t^{-3}$)	[18] 式 (7) の言い換え; 数値検証
極限 $-\gamma_E$ と傾き $\gamma_E^2 + 2\gamma_1$	古典 (ローラン展開); 数値検証
ポアソン双子 (モジュラー変換と積分表示; 極の対も鏡映対称)	古典 (Riemann [1]); 10^{-27} で検証
$L(0, \chi) = 0$ (偶原始指標) = 格子の一サイト前進	古典 [13]; 数値検証
オイラー積 $\Rightarrow \sigma > 1$ に零点なし $\Rightarrow$ 右格子と非両立	古典 (絶対収束)
第 II 部	
F が関数等式・実軸対称性・単純零点性を保つこと	初等的 (構成から); 10^{-25} で数値検証
補角則 $\arg \xi'_F(\rho_L) + \arg \xi'_F(\rho_R) = 180^\circ$, $ \xi'_F $ の相等	厳密 ($\xi_F(s) = \xi_F(1-s)$ の帰結); 数値検証
$\pm 90^\circ$ 交代則は補角則の $\delta \rightarrow 0$ 退化	厳密; [18] 第 5.2 節の再解釈
Z_F が符号交代を失うこと (床 0.0586)	厳密 (G の線上での実性と極の位置); 数値検証
$N_F - N_\zeta$ の単位の箱	厳密 (偏角原理); 数値検証
$M_1 = 0$ (双極子の消滅)	厳密 (鏡映四つ組の和 = 2)
遠方場 $\arg G \simeq (M_2\sigma - M_3/3)t^{-3}$	初等的 (展開); $t \leq 3200$ で数値検証
接地の裏返し・折り返し点 $\sigma^* = 0.37254$ (線の左側)・横断 $t = 38.999$	数値 (有限格子・二分法); 図で例証
$\sigma > 1$ への捻りの漏れ (0.258 rad)	模型の性質; 本物の ζ には移らない (第 14 節)
$\psi(x)$ の誤差項が $x^{0.8}$ になること	古典 (明示公式); 数値で可視化
極の定数のずれ 7.3×10^{-6}	初等的; 数値検証
$\lambda_c - \lambda = \delta^2/2$	平均場の類推; Λ は計算していない
「捻り」「波の返し」「反接地」「接地の裏返し」という語り	比喩; 数学的内容は上の式に限る
リーマン予想の成否	本稿は何も述べない

限界。 (a) 本稿に新規の数学的結果はない。第 I 部はすべて古典的事実の整理と数値検証であり、第 II 部は明示的な模型についての初等的計算である。(b) Z_2 も F も説明のための設計物であり、どちらもオイラー積をもたない (セルバーク族に属さない)。したがって F は「リーマン予想が偽であるときの ζ 」の絵ではない。本物の ζ は零点の位置によらずオイラー積をもつので、第 14 節の「素数の母国への漏れ」は模型の影である。(c) 第 15 節だけは論理が異なり、 ζ の零点が動いたと仮定したときの明示公式の予算という古典的計算である。模型 F の係数の話ではない。(d) 動かす対を (ρ_6, ρ_7) に、ずれ

を $\delta = 0.3$ に選んだのは任意である。局所像（裏返し・補角則・四重極）は一般的だが、 $\sigma^* = 0.3725$ や床 0.0586 といった個々の数値は模型固有である。(e) 巻き数・打ち消し・鏡映残差などの数値は有限精度（8～30 桁）の検算であり、証明は各古典的事実の側にある。位相図の芯の追跡は有限格子（ σ, t と 10^{-3} 級の刻み）に基づく。(f) de Bruijn–Newman の対応は局所的な平均場の類推であり、 Λ の計算ではない。(g) 参考文献の書誌は記憶によるもので原典と照合しておらず、体系的な文献調査も行っていない。等位曲線の解析は Arias de Reyna [14] の X 線解析と重なる可能性が高い。文献 [18, 17, 19] は非アーカイブ引用である。(h) 計算は本文の記述から再実装可能な短いスクリプト群によるが、コードは公開していない。

20 結語

二つの「もし」を並べて計算すると、 ζ の平面の中で誰が何をしているのかが、はっきり分かれて見えてくる。

もし極 $s = 1$ がなければ——右側にも格子が立ち、波舌は色相を入れ替えた左の完全な鏡像として伸びるだろう。だが現実の ζ では、その格子は打ち消しによって巻きごと均されており、最初のサイトだけが極として残っている。そして右側の波は、失われているのではない。関数等式がそれを左へ返しており、返しの装置と極とは、一本のポアソン恒等式から同時に生まれた双子である。返された震えの総強度は、留数 1 と定数 $-\gamma_E$ という形で極に刻まれている。

もし零点が線に並んでいなければ——平面の捻りは消えないし、広がりもしない。関数等式が双極子を禁じるので、欠陥の影響は四重極として t^{-3} で落ち、極はほとんど気づかない。壊れるのは臨界線のすぐそばの配線である。一本の波舌は線を越えて右半平面へ入り、もう一本は自分の零点を歩き過ぎて折り返し、裏側から接地する。線は接地を失い、未遂に終わるはずのレーマー対がそこで完成する。そして代価は位相図の外で、素数階段の誤差項として支払われる。

極は捻りを作り、鏡映がそれを返し、零点が受け止める。二つの問いは、この一つの流れを両端から突いたものであった。どちらの端を動かしても、最後に請求書を出すのはオイラー積である。

21 訂正版（2026 年 9 月 2 日）での変更点

8 月 19 日版にあった以下の誤り・矛盾を訂正した。数値は一切変更していない。

1. 鏡映格子（概要 (1), 第 1 節 問い I, 第 2 節）。旧版は $\{0, -2, -4, \dots\}$ を「自明零点の格子」と呼ぶ一方で、 $\{-2, -4, -6, \dots\}$ を鏡に映すと $\{1, 3, 5, \dots\}$ になると述べており、互いに矛盾していた。 $s \mapsto 1 - s$ による $\{-2, -4, -6, \dots\}$ の鏡映は $\{3, 5, 7, \dots\}$ であり、 $s = 1$ は $s = 0$ ($\zeta(0) = -\frac{1}{2} \neq 0$) の鏡映である。格子 $\{0, -2, -4, \dots\}$ は $\Gamma(s/2)$ の極の格子であり、そのうち自明零点は $-2, -4, \dots$ だけであると明記した。
2. 上の波舌の折り返し点（概要 (8), 第 10 節, 図 7・8, 第 17 節, 第 20 節）。旧版は上の波舌が「臨界線を越えて」 $\sigma^* = 0.37254$ で折り返すと述べていたが、 $\sigma^* < \frac{1}{2}$ であり、表 2 でも $\sigma = 0.45$ で芯は一本しかない。すなわち上の波舌は臨界線に達しない： ρ_L ($\sigma = 0.2$) を行き過ぎ、 σ^* で折り返して ρ_L に右側から接地する。臨界線を横断して右半平面に入るのは下の波舌だけであり ($t = 38.999$)、それが ρ_R に接地する。該当箇所をすべてこの通りに改めた。
3. Z_2 の接地（第 3.2 節, 図 2, 第 8 節）。 Z_2 は臨界線上で実なので、左の水色の芯とその鏡像がともに単純零点に横から入ることはできない。両者は隣接する二つの零点の間の線上の鞍点で出会い、一組の鏡映対が二個の零点を受けもつ ($\Delta \arg Z_2(-2 + it) \approx -\theta(t)$, すなわち ζ の巻きの半分、と整合する)。「共有の零点に接地する」としていた図 2 の説明を改め、説明の段落を加え、図 2 を水色の芯の軌跡つきで描き直した（鞍点は $t = 29.31, 36.58, 42.62$)。
4. 概要 (9), 第 17 節。「 $|Z|$ 」を「 $|Z_F|$ 」に改めた。床 0.0586 は模型の性質であって ζ のものではない。
5. 第 4 節。補正項 $3.125/t$ の由来 ($\sigma = -2$ における $\arg \chi(\sigma + it)$ のスターリング展開の $O(1/t)$ 項) を明記した。
6. 表 2。「—」（未走査）と「なし」（走査したが芯なし）の意味を明記した。

7. 第 5 節, 第 16 節。旧版の日本語版では, 実測値の列 (-0.31439 , -0.31559 および -0.576833) が行末からはみ出して欠落していた。復元した。
8. 第 15 節。「 $x = 10^{12}$ ならこの比は 200 を超える」は指示対象が曖昧だったので, 量 (包絡 $2x^{0.3}/|\rho_R|$) を明示した。
9. 参考文献。[2, 5, 9, 11, 15] は掲載されているのに本文で引用されていなかった。該当箇所に引用を加えた。

参考文献

- [1] B. Riemann, Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse, Monatsber. Königl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (1859), 671–680.
- [2] F. Mertens, Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie, J. Reine Angew. Math. 78 (1874), 46–62.
- [3] H. von Mangoldt, Zu Riemanns Abhandlung über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse, J. Reine Angew. Math. 114 (1895), 255–305.
- [4] H. Bohr and B. Jessen, Über die Werteverteilung der Riemannschen Zetafunktion, Acta Math. 54 (1930), 1–35.
- [5] A. Speiser, Geometrisches zur Riemannschen Zetafunktion, Math. Ann. 110 (1935), 514–521.
- [6] A. Selberg, Contributions to the theory of the Riemann zeta-function, Arch. Math. Naturvid. 48 (1946), 89–155.
- [7] N. G. de Bruijn, The roots of trigonometric integrals, Duke Math. J. 17 (1950), 197–226.
- [8] D. H. Lehmer, On the roots of the Riemann zeta-function, Acta Math. 95 (1956), 291–298.
- [9] H. M. Edwards, Riemann's Zeta Function, Academic Press, New York, 1974.
- [10] C. M. Newman, Fourier transforms with only real zeros, Proc. Amer. Math. Soc. 61 (1976), 245–251.
- [11] E. C. Titchmarsh, The Theory of the Riemann Zeta-Function, 2nd ed., revised by D. R. Heath-Brown, Oxford Univ. Press, 1986.
- [12] G. Csordas, W. Smith, and R. S. Varga, Lehmer pairs of zeros, the de Bruijn–Newman constant Λ , and the Riemann hypothesis, Constr. Approx. 10 (1994), 107–129.
- [13] H. Davenport, Multiplicative Number Theory, 3rd ed., Graduate Texts in Mathematics 74, Springer, 2000.
- [14] J. Arias de Reyna, X-Ray of Riemann's zeta-function, arXiv:math/0309433 (2003).
- [15] E. Wegert, Visual Complex Functions: An Introduction with Phase Portraits, Birkhäuser, 2012.
- [16] B. Rodgers and T. Tao, The de Bruijn–Newman constant is non-negative, Forum Math. Pi 8 (2020), e6.
- [17] Toshiki Takahashi, 『臨界線上の基音 $2^{-1/2-it}$ と素数・零点双対性——チューリング・パターンの視点からの覚書——』, 2026 年 8 月 18 日。
- [18] Toshiki Takahashi, 『リーマン・ゼータ関数の「波舌」——位相の〈巻き〉と〈うねり〉への分解, そして素数の櫛の分光——』, 2026 年 8 月 18 日。
- [19] Toshiki Takahashi, 『複素平面上の極震による素数波の形成——極 $s = 1$ ・鏡映格子・波の返し の計算——』, 2026 年 8 月 19 日。