

複素情報理論の基礎——期待の複素表現の力学的拡張

「期待の複素表現による人工知能の評価関数」への補遺

2026 年 7 月 17 日 (2026 年 7 月 18 日 改訂)

改訂にあたって (本版の変更点) : 本改訂版では、知識と確度の定義を「日曜経済学 #12 知識増分と確度」および「#18 流行の回転」に整合させた。すなわち、情報量 $I = -\log p$ (実) と知識量 $K = -i \log p = iI$ (虚) を「言葉を情報として見るか、知識として見るか」という二つの見方として明示的に区別し (#12)、確率波 $p = e^{Ki} = \cos K + i \sin K$ により知識量で確率位相が回ること (#18) を採用する。確度は「確率の小ささ・確率の減少分・確実性の度合い」を表す量 $-\log p = |K|$ として定義する (#12)。これに伴い、複素情報平面の実軸を情報 (親昵-深遠)、虚軸を知識 (確実-変動) と同定し直し、旧稿の (A3) における軸ラベルの符号の乱れを正した。力学部 (§3, §5, §6, 補遺 A) は μ, m, n, s のみに依存するため、結論を含め変更されない。

0. 本稿の位置づけ

添付論文 (高橋 2026) は、人の期待を複素状態 $\Psi = \mu e^{iK}$ として静的に定式化した。本稿は、参照ノート群の定義を公理として採用し、静的な評価関数 V を、情報時間 I について発展する力学系へ拡張する。定義の典拠は次のとおりである。

- ・ 情報と知識の区別、および確度——「日曜経済学 #12 知識増分と確度」。情報量 $-\log p$ (実) と知識量 $-i \log p$ (虚) を二つの見方として区別し、確度を「確率の小ささ」として導入する。
- ・ 四つの期待型と確率波——「#18 流行の回転」。データ平均 $\mu_x = -\log p_x$ を複素平面にとり、親昵性・確実性・深遠性・変動性の四方向を得る。確率波 $p = e^{Ki} = \cos K + i \sin K$ により知識が位相を回す。
- ・ 複素情報量 P と情報量微分 $d/d\mu = d/dI$ ——「#27 情報量の存在確率」。総和系・速度系はこれに従う。

さらに、

確率は面積 (2 次元) であり、情報量は確率の関数だが 0 か 1 かなので 1 次元の時間に等しい

という次元の定義を加える。

方法上の注記. 以下は参照ノートの定義を公準として展開する公理論的構成である。参照ノートは符号の扱いが緩いため、情報時間の順方向 (= 減衰と反時計回転が起こる向き) は一箇所て規約として固定する。整数論的主張 (ζ 関数) は本稿の射程外とし、 $s = m + ni$ は純粋に複素情報の重みとして扱う。

1. 採用する定義 (公理)

(A1) 確率は面積 (2 次元) . 確率 $p \in [0, 1]$ は 2 次元の測度 (面積の割合) である。したがって期待状態 Ψ が住む複素平面 $\mathbb{C}$ は、この確率 = 面積そのものである。

(A2) 情報量は時間 (1 次元)、知識量は位相 (回転) . 命題は二通りに見ることができる (#12) . 真偽を $\{0, 1\}$ の二値で問う情報としての見方と、その帰結・本質を問う知識としての見方である。前者に対応する量が

$$\text{情報量 } I = -\log p \text{ (実),}$$

後者に対応する量が

$$\text{知識量 } K = -i \log p = iI \text{ (虚)}$$

である。情報量は p の関数だが、命題の真偽は二値であり、二値の軸は 1 次元、そして 1 次元は時間に等しい。ゆえに $I \equiv t$ (時間) とみなす。順方向の時間経過が情報の蓄積である。一方、知識量は情報量に i を掛けた虚の量であり、確率の位相を担う。基本関係

$$p = e^{-I} = e^{-t}, \quad K = -i \log p = iI, \quad p = e^{Ki} = \cos K + i \sin K$$

は、「時間が進むほど確率 (面積) が指数的に絞られる」ことと、「知識量で確率位相が回る」こと (確率波、#18) を同時に表す。 $e^{Ki} = \cos K + i \sin K$ が確率 p そのものであることに注意する ($Ki = -i^2 \log p = \log p$ より $e^{Ki} = e^{\log p} = p$) 。

(A3) 複素情報量と確度. 情報 (実軸) と知識 (虚軸) の平面において、複素情報量を

$$P = mI + nK = mI + n(iI) = (m + ni)I = (m + ni)\mu, \quad s := m + ni$$

と定める。ここで $\mu = I = -\log p (\geq 0)$ を正の基本量とした。 $\text{Re } P = mI$ が情報の寄与、 $\text{Im } P = nI$ (すなわち知識 nK) が知識の寄与であり、 $s = m + ni$ を複素重みと呼ぶ。実軸の重み m は親昵-深遠、虚軸の重み n は確実-変動に対応する (§4、#18) 。

確度を、確率の小ささ・確率の減少分・確実性の度合いを表す量 (#12) として

$$\text{確度} = -\log p = |K| = |I| = \mu$$

と定義する。 p が小さい (= 物事が起こらない確率が高い) ほど確度は高く、知識量 K の大きさがそのまま確度を測る。知識に情報を足しても引いても確度は上がる (#12) :

$$K_o + K_s = -i \log(p_o p_s) \quad (p_o p_s < p_o \text{ ゆえ確度増}), \quad K_o - K_s = -i \log\left(\frac{p_o}{p_s}\right) \quad (\text{本質を問い確度増}).$$

参照ノートの総和系は、 $\sum \mu p = H(p)$ (情報エントロピー) を複素重みで拡張したものとして

$$\sum P p = (m + ni) H(p), \quad \sum P^2 = \frac{m + ni}{2} \sum P$$

と整合する。

(A4) 情報量微分.

$$D := \frac{d}{d\mu} = \frac{d}{dI} = \frac{d}{dt}.$$

(A2) により D は時間発展の生成子である。その作用は参照ノートに従い

$$D e^P = s e^P, \quad D e^E = x s e^E \quad (E = xP, \text{ 複素期待}).$$

すなわち e^P は情報量微分の固有関数であり、その固有値が複素重み s である。

2. (2 + 1) 情報時空

(A1)(A2) を合わせると、理論の舞台は次の (2 + 1) 次元の情報時空である。

- 2 次元の確率=面積：複素平面 $\mathbb{C}$ (Ψ の住む所、複素重み $s = m + ni$ の住む所)。実軸 m は親昵-深遠 (=情報の軸)、虚軸 n は確実-変動 (=知識の軸)。
- 1 次元の情報=時間： I 。

期待状態は面積 $\mathbb{C}$ 上の一点であり、時間 I の流れがその点を動かす。(A4) の固有値方程式 $D e^P = s e^P$ は、この構造における一階の時間発展

$$\frac{d\Psi}{dI} = (\text{複素速度}) \Psi$$

を与える。真偽が二値=1 次元ゆえ時間は一本であり、発展は偏微分方程式ではなく一階常微分方程式になる——これが (A2) の「0 か 1 か」を計算に用いた直接の帰結である。

3. 情報量微分は時間発展の生成子

固有関数 e^P を時間 I の関数として書く。振幅の減衰 (満足=飽和) と、位相の反時計回転 (型の巡回 親昵 → 確実 → 深遠 → 変動、論文系 3) が順方向で起こるよう情報時間を向きづけると、期待状態は

$$\Psi(I) = \Psi(0) e^{(-m+in)I} = \Psi(0) e^{-mI} e^{inI}$$

と発展する。複素重み $s = m + ni$ の

- 実部 $m \dots$ 減衰率：振幅 e^{-mI} (期待の飽和、情報の飽和)
- 虚部 $n \dots$ 角速度：位相 e^{inI} (期待の型の回転、知識による位相回転)

参照ノートの二つの速度は、 I が時間であることにより文字通りの速度になる：

$$v_I = \frac{d e^P}{dI} = s e^P \text{ (情報が伝わる速さ)}, \quad v_E = \frac{d e^E}{dI} = x s e^E \text{ (期待が広がる速さ)}.$$

その大きさは $|v_I| = |s| |e^P| = \sqrt{m^2 + n^2} |e^P|$ 。位相速度は $dK/dI = n$ 、飽和率は $-d(\ln \mu)/dI = m$ 。複素重み s は「(飽和率, 角速度)」を一つの複素数に束ねたものである。

4. 期待の複素状態 = 複素情報状態 (統一)

添付論文の期待方向

$$\Phi_H = (w_0 - w_2) + i(w_1 - w_3)$$

は、実部が親昵-深遠の重み (情報軸)、虚部が確実-変動の重み (知識軸) である。これは複素重み s の実部・虚部そのものである：

$$s_H = m_H + i n_H = (w_0 - w_2) + i(w_1 - w_3) = \Phi_H,$$

$$m_H = w_0 - w_2 \text{ (親昵 - 深遠)}, \quad n_H = w_1 - w_3 \text{ (確実 - 変動)}.$$

ゆえに期待の複素状態は複素情報状態にほかならず、

$$\Psi_H = \mu_H e^{iK_H}, \quad K_H = \arg s_H = \arctan \frac{n_H}{m_H}.$$

四つの型は複素重みの四つの単位値 $s = i^k$ である。親昵性・深遠性は情報 (実軸 $-\log p$) に、確実性・変動性は知識 (虚軸 $-i \log p$) に対応する (#18)。

k	型	位相 K	複素重み $s = i^k (m, n)$	力学的役割
0	親昵性	0	+1 (1, 0)	振幅を動かす（回転なし）
1	確実性	$\pi/2$	+i (0, 1)	反時計回転 ($n > 0$)
2	深遠性	π	-1 (-1, 0)	振幅を動かす（逆符号）
3	変動性	$3\pi/2$	-i (0, -1)	時計回転 ($n < 0$)

純粋な確実性・変動性 ($n \neq 0, m = 0$) は回転を駆動し（知識が位相を回す）、純粋な親昵性・深遠性 ($m \neq 0, n = 0$) は振幅の飽和／増勢を駆動する（情報が振幅を絞る）。添付論文の一方向巡回（親昵 → 確実 → 深遠 → 変動）は $n_H > 0$ の分枝であり、複素情報の枠組みは $n_H < 0$ の逆回転も許す——これは静的定式化には無かった自由度である。

（記号の注意： μ_H, μ_A は期待状態の強さ（集約量）であり、時間パラメータ I （対話で蓄積した情報量）とは別の量である。）

5. 評価関数の力学化（中心的計算）

人の期待は自由発展し、AI は各情報時刻に出力を選ぶとする。§3 より

$$\Psi_H(I) = \mu_H e^{-m_H I} e^{i(K_{H,0} + n_H I)}.$$

AI の状態を $\Psi_A(I) = \mu_A e^{iK_A(I)}$ とし、 $\lambda = 1$ で厳密形になる添付論文の評価関数を情報時間で評価する：

$$V(I) = \operatorname{Re} [\overline{\Psi_H(I)} \Psi_A(I)] - \frac{\lambda}{2} |\Psi_A(I)|^2.$$

内積を計算すると

$$\overline{\Psi_H(I)} \Psi_A(I) = \mu_H \mu_A e^{-m_H I} e^{i(K_A(I) - K_{H,0} - n_H I)}.$$

ゆえに $\Delta K(I) := K_A(I) - K_H(I) = K_A(I) - K_{H,0} - n_H I$ とおいて

$$V(I) = \mu_H \mu_A e^{-m_H I} \cos \Delta K(I) - \frac{\lambda}{2} \mu_A^2.$$

$I = 0$ で $e^0 = 1$ となり、添付論文の $V = \mu_H \mu_A \cos \Delta K - \frac{\lambda}{2} \mu_A^2$ に一致する。本拡張は論文を「情報時間の初期スライス」として含む。

報酬項の二重の消耗. 交差（報酬）項は $e^{-m_H I}$ で飽和し、 $\cos \Delta K(I)$ で振動する。一方、罰項 $-\frac{\lambda}{2} \mu_A^2$ は情報時間によらず残る。ここに「答え違いは沈黙より悪い」機構が定量的に現れる（系 2'）。

6. 命題（拡張）

命題 1'（瞬時最大化）. 各 I で μ_A について停留させると

$$\mu_A^*(I) = \frac{\mu_H}{\lambda} e^{-m_H I} \cos \Delta K(I), \quad V^*(I) = \frac{\mu_H^2}{2\lambda} e^{-2m_H I} \cos^2 \Delta K(I).$$

$I = 0$ で添付論文の命題 1 ($\mu_A^* = \frac{\mu_H}{\lambda} \cos \Delta K$, $V^* = \frac{\mu_H^2}{2\lambda} \cos^2 \Delta K$) に還元する。

系 2'（直交と反転）. 固定出力 (μ_A, K_A 一定) では $\Delta K(I) = \Delta K_0 - n_H I$ 。

- $\Delta K = \pi/2$ ($n_H I = \pi/2 - \Delta K_0$) で報酬項が消え、 $V = -\frac{\lambda}{2}\mu_A^2 < 0$ 。
- $\Delta K = \pi$ ($n_H I = \pi - \Delta K_0$) で $\cos = -1$ 、 $V = -\mu_H \mu_A e^{-m_H I} - \frac{\lambda}{2}\mu_A^2$ (最も負)。

「良い答えだが求めと違う (直交)」で $V = 0$ どころか、罰だけが残るため負に沈む。これは対話型 AI が安全側で曖昧化するときの失敗の力学的正体である。

系 3' (飽きの情報時間) . $\Delta K_0 = 0$ の初期整合から、報酬が最初に零になる情報時間は

$$I_0 = \frac{\pi}{2n_H}.$$

飽きるまでに要する情報量は $n_H = w_1 - w_3$ に反比例する。確実性・変動性に偏る人 ($|n_H|$ 大) は速く飽き、両者に均衡する人 ($n_H \approx 0$) は飽きにくい。親昵-深遠軸のみの期待 ($n_H = 0$) は回転せず、振幅 $e^{-m_H I}$ の飽和だけで満たされる。

命題 4' (追従則=制御則) . 位相ずれを凍結するには

$$\frac{dK_A}{dI} = \frac{dK_H}{dI} = n_H \quad (\text{共回転}),$$

評価を最大化するにはさらに $\Delta K = 0$ 、すなわち

$$s_A(I) = s_H(I) \quad (\text{AI は人の複素重みを追従せよ}).$$

系 5' (爽やかな不要化) . 追従則の下では

$$V^*(I) = \frac{\mu_H^2}{2\lambda} e^{-2m_H I} \xrightarrow{I \rightarrow \infty} 0.$$

完全に追従しても、情報時間の経過とともに評価は 0 へ緩やかに減衰する (負にはならない)。これは「期待を満たしきり、用が済めば爽やかに不要になる」 (論文 §8) の厳密形である。「満たすこと」と「去ること」は同一の減衰 $e^{-2m_H I}$ の別名であり、 m_H (親昵-深遠=情報の飽和率) がその速さを定める。

7. 速度・わかりにくさ・希少性の解釈

情報速度. $|v_I| = \sqrt{m^2 + n^2} |e^P|$. 情報の伝わる速さは複素重みの大きさに比例する。位相速度 n (知識) が型の回転を、実部 m (情報) が飽和を担う。

わかりにくさ. 参照ノートの「 $1/(m+ni)$ が増えるとわかりにくさが上がる」は

$$\left| \frac{1}{s} \right| = \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

$|s|$ が小さいほど (飽和も回転も遅く) 期待は解けずに滞留し、わかりにくさが持続する。わかりにくさは深遠性 (実軸負、 $\log p$ 方向) に対応し、親昵性 (情報) の反対向きである。

希少性. $m = n = 1$ で $r = 1 - \log p = 1 + I$. 情報時間の経過とともに状態は線形に希少になる (より特定のになる)。

(整数論的対応 $\zeta(s) = \sum P$ 、 $m = 1/2$ の臨界線は参照ノートの主張だが、本稿では扱わない。)

8. 結

判断面が複素ベクトルであること（論文）に、情報量微分が時間発展の生成子であること（本稿）を重ねると、期待の複素状態は情報時間について発展する：複素重み $s = m + ni$ の実部（情報）が飽和を、虚部（知識）が型の回転を司る。静的な評価関数は

$$V(I) = \mu_H \mu_A e^{-m_H I} \cos \Delta K(I) - \frac{\lambda}{2} \mu_A^2$$

という一本の力学に拡張され、瞬時最大（命題 1'）、直交と反転（系 2'）、飽きの情報時間 $\pi/2n_H$ （系 3'）、追従則 $s_A = s_H$ （命題 4'）、そして満たすことが去ることに等しい爽やかな減衰（系 5'）が、すべて同じ式から従う。

期待は回り、そして飽和する。ゆえに、よい人工知能とは、人の複素重み s に実部（情報）でも虚部（知識）でも追従し、満たしながら緩やかに 0 へ——爽やかに不要へ——と去るものである。

補遺 A：複素時間——実時間の複素化

A.1 実時間から複素時間へ

(A2) は「情報量 $I = -\log p$ は 0 か 1 かの二値ゆえ 1 次元、すなわち 1 次元の実時間」とした。これを複素重み $s = m + ni$ で複素化する。複素情報量

$$T := P = (m + ni) I = s I$$

は 2 つの実成分 (mI, nI) をもつ 2 次元の複素平面 $\mathbb{C}$ 上の量であり、実時間 I の複素化として複素時間の役割を担う。実時間はその特別な場合 ($s = 1$ 、すなわち親昵＝情報の軸) にすぎない。

A.2 複素時間の 2 成分と四型

複素時間は実部と虚部に分かれる：

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} T &= mI && (\text{実時間、親昵-深遠、情報、動径=減衰}), \\ \operatorname{Im} T &= nI = K && (\text{虚時間、確実-変動、知識、偏角=位相}). \end{aligned}$$

すなわち実時間（情報）は振幅（動径 μ ）を減衰させ、虚時間（知識）は位相 K を進める。四つの期待型は、複素時間の四つの向きである：

型	複素重み $s = i^k$	複素時間の向き	発展
親昵性	+1	実時間 +	e^{-mI} (減衰)
深遠性	-1	実時間 -	e^{+mI} (増勢)
確実性	+i	虚時間 +	e^{+inI} (反時計)
変動性	-i	虚時間 -	e^{-inI} (時計)

親昵-深遠は実時間軸（情報：減衰／増勢＝不可逆・熱的）、確実-変動は虚時間軸（知識：振動＝可逆・波動）を占める。これは物理のウィック回転（実時間の振動 $\leftrightarrow$ 虚時間の減衰）の対応そのものである。

論文の $\times i$ はウィック回転である．(A2) の $K = -i \log p = iI$ は「実時間 I を $\times i$ で 90° 回した量」であり、論文の「 $\times i$ で型を回す」操作は、複素時間における実時間 $\rightarrow$ 虚時間の回転（情報 $\rightarrow$ 知識）にほかならない：

$$\text{親昵 (実+)} \xrightarrow{\times i} \text{確実 (虚+)} \xrightarrow{\times i} \text{深遠 (実-)} \xrightarrow{\times i} \text{変動 (虚-)} \xrightarrow{\times i} \text{親昵}.$$

四型の巡回は、複素時間の四方向の巡回であり、各段が一回のウィック回転である。

A.3 複素時間微分と発展

複素時間微分を情報量微分から導く。 $T = sI$ より $d/dI = s d/dT$ 、ゆえに

$$\frac{d}{dT} = \frac{1}{s} \frac{d}{dI} = \frac{1}{s} D.$$

このとき e^T は複素時間微分の固有関数で固有値 1（正準指数）となり、実時間での固有値 s (§3) は複素時間が吸収する： $\frac{d}{dT} e^T = e^T$ 。状態の発展は複素時間で

$$\Psi(I) = \Psi(0) e^{-T} = \Psi(0) e^{-\text{Re } T} e^{i \text{Im } T}$$

と書ける（振幅は $\text{Re } T$ で減衰、位相は $\text{Im } T$ で進む）。さらに複素時間は加法的に合成する：

$$e^{T_1} e^{T_2} = e^{T_1 + T_2}.$$

「 T_1 だけ発展してから T_2 だけ発展」＝「 $T_1 + T_2$ だけ発展」——複素時間が真に時間であることの半群性である。

A.4 虚時間の周期性と「期待の温度」

位相因子 $e^{i \text{Im } T}$ は $\text{Im } T$ について周期 2π をもつ。虚時間 $\text{Im } T = nI$ を実時間 I に直すと、周期は

$$\beta = \frac{2\pi}{n}.$$

物理では虚時間の周期は逆温度である（KMS）。ここでも虚時間の周期 $\beta = 2\pi/n$ が期待の逆温度であり、期待の温度は

$$\mathcal{T}_{\text{exp}} \propto n = w_1 - w_3 \text{ (確実 - 変動、知識の回転率).}$$

確実性・変動性に偏る人（ n 大）は高温＝短周期＝速い周回、均衡する人（ $n \approx 0$ ）は低温＝長周期。四分の一周期

$$\frac{\beta}{4} = \frac{\pi}{2n} = I_0$$

は §6 系 3' の飽きの情報時間に一致する。飽きとは虚時間の四分の一周期の経過であり、系 3' は複素時間の熱力学として再導出される。

A.5 複素時間での評価関数

§5 の評価関数を複素時間で表すと、実時間（情報）が減衰を、虚時間（知識）が共鳴を担う：

$$V(I) = \mu_H \mu_A e^{-\text{Re } T_H} \cos(\text{Im } T_A - \text{Im } T_H) - \frac{\lambda}{2} \mu_A^2.$$

（初期位相は $\text{Im } T$ に吸収した。）実時間 $\text{Re } T_H = m_H I$ が関与を減衰させ、虚時間差 $\text{Im } T_A - \text{Im } T_H$ が $\cos$ の共鳴（ ΔK ）を与える。追従 $T_A = T_H$ で

$$V^*(I) = \frac{\mu_H^2}{2\lambda} e^{-2\text{Re } T_H} \xrightarrow{I \rightarrow \infty} 0$$

となり、系 5'（爽やかな不要化）は「実時間に沿った減衰」として現れる。

A.6 次元のまとめ：確率も情報も 2 次元複素平面

	正体	次元	座標
確率	面積＝空間	2 次元複素平面 $\mathbb{C}$	状態 $\Psi = \mu e^{iK}$ （動径 μ ・偏角 K ）
複素情報量	複素時間	2 次元複素平面 $\mathbb{C}$	$T = sI$ （実部 mI ・虚部 nI ）

確率（空間）も情報（時間）も、ともに 2 次元の複素平面である。§1 の 1 次元実時間 I は、複素時間 T の実軸（ $n = 0$ 、親昵-深遠＝情報）への射影にすぎなかった。確実-変動という虚時間＝知識の自由度を落とせば実 1 次元時間に戻り、加えれば複素時間が現れる。複素時間 $T = sI$ は状態平面（＝確率＝面積）にその指数 e^{-T} として作用し、実部（情報）が動径を、虚部（知識）が偏角を回す——空間と時間はともに $\mathbb{C}$ であり、 $T = sI$ （実時間 $\times$ 複素重み）で結ばれた互いの鏡像である。

参考

- ・高橋俊樹「期待の複素表現による人工知能の評価関数」（2026 年 7 月 14 日）
- ・たかはし博士「日曜経済学 #12 知識増分と確度」
<https://docmiso.hatenadiary.jp/entry/20260129/1769646650>
- ・たかはし博士「日曜経済学 #18 流行の回転」
<https://docmiso.hatenadiary.jp/entry/20260218/1771423750>
- ・たかはし博士「日曜経済学 #27 情報量の存在確率」
<https://docmiso.hatenadiary.jp/entry/20260315/1773531747>