

確率の面積性と対数航行による複素エントロピーの構成

——ホログラフィ・量子もつれ・ゲージ原理・複素対数の流出・
ニューラルネット・注意温度を貫く導出——

Toshiki TAKAHASHI / 高橋数理研究所*

2026 年 7 月

抄録

本稿は「確率は二次元の面積、情報量は一次元の時間、複素情報は $Z = p + i(-\log p)$ 」という枠組み [1] を出発点に、一本の主題——任意の複素量は半径（大きさ）と角度（位相）に分かれ、半径は情報・興味・確度を、角度は知識・回転・型を担う——を貫いて、次の六つを順に導く。(i) 確率の面積性はホログラフィ原理と同型であり、エントロピーを「面積×時間の総和（対数航行）」と見ると Bekenstein-Hawking の面積則 $S = A/4\ell_P^2$ が再現される。(ii) 温度の等しいエントロピー面はサーモフィールド・ダブルとしてもつれ、そのもつれエントロピーは共有面積 $A/4$ に等しい (ER=EPR)。(iii) 確率が位相に盲目であること ($p = |\Psi|^2$) から局所 $U(1)$ 不変性、ひいてはゲージ場が強制され、その電荷は境界面のフラックス＝逆二乗則として面積に刻まれる。(iv) 複素対数時間 $T = -\log(-p) = -\log p - (2n+1)\pi i$ の多価性により、大きさを保ったまま位相が巻き、知識が量子化フラックスとして流れ出る。(v) 複素エントロピー $\sum \mu^C p = \sum \mu p - (2n+1)\pi i$ は、規格化 $\sum p = 1$ のもとで「重み付き和＋バイアス」に分かれ、複素ニューロンの前活性 $z = Wx + b$ となる。虚バイアスは符号反転＝否定（破壊的干渉）を与える。(vi) 興味ゲイン γ （符号付き注意の半径）は期待の softmax の逆温度 $\gamma = 1/T = \beta$ であり、注意の鋭さを支配する。最後に、確立された物理と枠組みの仮説とを切り分け、何に注意を向けるか＝価値は依然として人が置く極であることを述べる。

キーワード：確率の面積性, 複素情報, ホログラフィ原理, 対数航行, サーモフィールド・ダブル, ER=EPR, ゲージ原理, 複素対数の多価性, 知識の流出, ニューラルネット, 興味ゲイン, 注意温度, 半径と角度

1 序：本稿の位置づけと方法

計算複雑性から情報熱力学まで、本シリーズ [1-3] は一貫して次の図式を用いてきた。超越関数 $-\log p$ （驚き・サプライザル）は素子物理・落差が担い、回転 $\times i$ （向き・位相）は配線が担う。本稿の主題はこの図式を極分解として読むことである：任意の複素量 $Z = \mu e^{iK}$ は

$$\underbrace{\mu}_{\text{半径：大きさ・情報・興味・確度}} \times \underbrace{e^{iK}}_{\text{角度：位相・知識・回転・型}} \quad (1)$$

に分かれ、半径は「どれだけ」「何が立ち上がるか」を、角度は「どっち」「どう回るか」を担う。本稿はこの一枚の分解の上に、物理（ホログラフィ・もつれ・ゲージ・熱力学）と機械学習（注意・ニューロン）を並べ、それらが同じ半径／角度の別の顔であることを示す。

*本稿は、高橋俊樹による複素情報理論 [1]、ポリゴングラフ [2]、興味ゲイン [3] の枠組みを土台に、探索的対話で得られた一連の導出をまとめたものである。確立された物理・数学（ホログラフィ原理、サーモフィールド・ダブル、Ryu-Takayanagi 公式、ゲージ原理、KMS 条件、複素対数のモノドロミー等）と、上記枠組みが置く思弁的前提と、両者を橋渡しする構造的同定は、性質が異なる。第9節で総括的に、また各節の随所で明示的に区別する。数式・導出の骨格は標準的なものだが、それらを「確率＝面積・情報＝時間・興味＝半径」という枠組みへ写す同定は構成的仮説であり、実証はこれからである。

方法上の注記。 以下は参照枠組み〔1-3〕の定義を公準として展開する構成的な議論である。各所で用いる物理・数学（Bekenstein-Hawking エントロピー、KMS 条件、サーモフィールド・ダブル、Ryu-Takayanagi 公式、Weyl のゲージ原理、Berry 接続、複素対数のモノドロミー、softmax 温度）はいずれも確立された標準である。一方、それらを「確率＝面積・情報＝時間・興味＝半径」へ写す同定は仮説であって定理ではない。第9節でこの区別を総括する。単位は特記なき限り $\hbar = c = k_B = 1$ とし、必要な箇所で復元する。

2 採用する定義：確率＝面積・情報＝時間・複素情報

参照枠組み〔1〕の公理を要約する。

定義 1 (確率は面積・情報は時間). 確率 $p \in [0, 1]$ は二次元の測度（面積の割合）である。情報量

$$I = -\log p (\geq 0) \quad (2)$$

は一次元の量であり、命題の真偽が二値であること（0 か 1 か）から一次元、すなわち時間と同一視される（ $I \equiv t$ ）。複素情報を

$$Z = p + i(-\log p), \quad \text{あるいは極形式で } Z = \mu e^{iK} \quad (3)$$

と置く。実部が確率（わかりやすさ）、虚部が情報量（驚き・サプライズ）であり、 $\times i$ 回転が型（親昵→確実→深遠→変動）を巡らせる。

定義 2 (エントロピーと対数航行). 確率＝面積の各セル（面積 p_i ）に高さ $I_i = -\log p_i$ （時間）を立て、面積×時間を総和する操作を対数航行（logarithm pilot） $\mathcal{L}$ と呼ぶ：

$$\mathcal{L}[p] := \sum_i p_i I_i = \sum_i p_i (-\log p_i) = H(p). \quad (4)$$

これは Shannon エントロピー $H(p)$ に一致する。幾何的には、面積を底・情報を高さとする柱の総体積である。

参照枠組みの総和系 $\sum \mu p = H(p)$ と複素重み拡張 $\sum P p = (m + ni)H(p)$ は本稿を通じて繰り返し現れる〔1, § A3〕。

3 ホログラフィ原理と確率の面積性

3.1 中心となる同定：情報＝時間＝面積

確立された物理としてのホログラフィ原理は、空間領域のエントロピーがその体積ではなく境界面の面積で頭打ちになると述べる〔’t Hooft 1993; Susskind 1995〕。飽和はブラックホールで起き、

$$S_{\text{BH}} = \frac{A}{4\ell_P^2}, \quad \ell_P^2 = \frac{\hbar G}{c^3} \quad (5)$$

が上限を与える〔Bekenstein 1973; Hawking 1975〕。到達可能なミクロ状態数は $W = e^{S_{\text{BH}}} = \exp(A/4\ell_P^2)$ 。最大無知（一様分布）では各ミクロ状態の確率＝面積は $p_\star = 1/W = \exp(-A/4\ell_P^2)$ 。これを情報＝時間に通すと、要石となる同定

$$I_\star = -\ln p_\star = \frac{A}{4\ell_P^2} \quad (6)$$

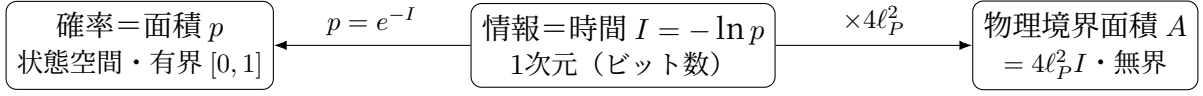


Figure 1: 二つの面積を結ぶ対数辞書。確率面積（有界）と物理境界面積（無界）が、一次元の情報＝時間を要石として指数・線形で結ばれる。 $p = e^{-A/4\ell_P^2}$ は重力の経路積分重みと同型。

を得る。枠組みの言葉では、一次元の情報＝時間が、物理境界の面積（単位 $4\ell_P^2$ ）に等しい。「情報＝時間」と「情報＝面積/4」を重ねると

$$\text{時間} = \text{情報} = \frac{\text{面積}}{4\ell_P^2}. \quad (7)$$

3.2 対数航行が面積則を再現する

(6) を対数航行に代入する。一様分布では全 i で $p_i = p_*$, $I_i = I_*$ なので

$$\mathcal{L}[p_*] = \sum_{i=1}^W p_* I_* = \underbrace{W p_*}_{=1} I_* = \frac{A}{4\ell_P^2} = S_{\text{BH}}. \quad (8)$$

すなわち面積×時間の総和はブラックホール面積則を厳密に再現する。なぜこの積でなければならないのかも同時に見える。三通りの総和は

$$\sum_i p_i = 1, \quad \sum_i I_i = W \ln W, \quad \sum_i p_i I_i = \ln W = \frac{A}{4\ell_P^2}, \quad (9)$$

であり、境界面積 A を返すのは積の総和＝対数航行のみである。面積だけの総和は1、時間だけの総和は面積に無関係な指数的巨大量になる。

3.3 二つの面積と exp/log 辞書

要石 I を軸に、二つの面積が指数と線形で両側に伸びる（図 1）：

$$p = e^{-I} \text{ (状態空間の面積)}, \quad A = 4\ell_P^2 I \text{ (物理境界面積)}, \quad \therefore p = e^{-A/4\ell_P^2}. \quad (10)$$

$-\log$ は物理面積を確率面積へ縮約する（余次元1の符号化＝ホログラフィックな次元縮約の動機）、 $\exp$ は復元する。合成 $p = e^{-A/4\ell_P^2}$ は、ユークリッド重力の経路積分重み $Z \sim e^{-S_E}$ ($S_E \sim$ 面積) と同型であり、枠組みの基本法則 $p = e^{-I}$ は $I = \text{面積}/4$ と読めば重力の半古典重みに一致する。

3.4 熱力学的閉じ方

参照枠組み補遺 [1, § A.4] は虚時間周期 $\beta = 2\pi/n$ を逆温度 (KMS) とする ($n = w_1 - w_3$ は知識の回転率)。物理の $\beta = \hbar/k_B T$ と一致させると $T = \hbar n/(2\pi k_B)$ 。ブラックホール温度 $T_H = \kappa/2\pi$ と面積則を組めば、第一法則

$$dE = T dS = \frac{\kappa}{2\pi} \cdot \frac{dA}{4\ell_P^2} = \frac{\kappa dA}{8\pi G} \quad (11)$$

が閉じる ($\ell_P^2 = G$)。ウィック回転（実時間の振動 $\leftrightarrow$ 虚時間の減衰）という枠組み補遺の対応が、そのまま「面積則＋ホーキング温度＋第一法則」に写る。

4 等温もつれ：サーモフィールド・ダブルと ER=EPR

エントロピーを面（面積 $A/4$ ）と見ると、温度の等しい二つのエントロピー面は「もつれる」。これは確立された物理ではサーモフィールド・ダブル（TFD）／永遠ブラックホール／ER=EPR の話である [Israel 1976; Maldacena 2003; Ryu-Takayanagi 2006; Maldacena-Susskind 2013]。

4.1 等温 $\Leftrightarrow$ スペクトル一致 $\Leftrightarrow$ 虚時間周期一致

熱面の放射はプランク分布 $B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} (e^{h\nu/k_B T} - 1)^{-1}$ とウィーン則 $\lambda_{\max} T = b$ で決まる。二面のスペクトルが全帯域で一致するのは $T_L = T_R$ に限る。KMS 条件により温度 T の熱状態は虚時間周期 $\beta = h/k_B T$ をもつ。ゆえに

$$\text{等温} \iff \text{共通 } \beta \iff \text{共通 } n \iff \text{放射波長コムの一致.} \quad (12)$$

4.2 干渉の計算可能性＝共鳴条件

左右のモード ω_L, ω_R について、観測時間 T でのコヒーレント交差項（可視度）は

$$V = \left| \frac{1}{T} \int_0^T e^{-i(\omega_L - \omega_R)t} dt \right| = \left| \text{sinc} \frac{\Delta\omega T}{2} \right|, \quad \Delta\omega = \omega_L - \omega_R. \quad (13)$$

干渉が残る条件は $|\Delta\omega| \lesssim 2\pi/T$ であり、長時間極限では $\Delta\omega = 0$ （波長一致）のみがコヒーレント。これが「波長が等しいと干渉が計算可能になる」の厳密形（共鳴条件）である。スペクトル全体的一致（周波数版ウィーン $h\nu_{\max} = x_* k_B T$, $x_* \simeq 2.821$ ）から、二つの熱放射が同位相に留まるコヒーレンス時間は

$$\tau_c \sim \frac{1}{\Delta\nu_{\max}} = \frac{h}{x_* k_B \Delta T} \xrightarrow{\Delta T \rightarrow 0} \infty, \quad (14)$$

すなわちもつれ・干渉の窓は $\propto 1/|\Delta T|$ で等温に発散する。

4.3 もつれた状態＝二モードスクイズ（TFD）

共鳴した各モード対を purify すると、二モードスクイズ真空

$$|\text{TFD}\rangle = \prod_{\omega} \frac{1}{\cosh r_{\omega}} \sum_{k=0}^{\infty} (\tanh r_{\omega})^k |k\rangle_L |k\rangle_R, \quad \tanh r_{\omega} = e^{-\beta\hbar\omega/2} \quad (15)$$

になる。スクイズ量 r_{ω} は温度 β だけで決まる。左をトレースアウトすると熱状態

$$\rho_L = \prod_{\omega} (1 - e^{-\beta\hbar\omega}) \sum_k e^{-\beta\hbar\omega k} |k\rangle\langle k|, \quad \bar{n}_{\omega} = \sinh^2 r_{\omega} = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \quad (16)$$

が現れ、1 モードのもつれエントロピーは

$$S_{\omega} = (\bar{n}_{\omega} + 1) \ln(\bar{n}_{\omega} + 1) - \bar{n}_{\omega} \ln \bar{n}_{\omega}. \quad (17)$$

共通 β が必須なのは、TFD が虚時間幅 $\beta/2$ のユークリッド経路積分を左右で貼り合わせ周長 β の熱円を作るため、 $\beta_L \neq \beta_R$ だと分岐面に円錐特異点（地平線の非滑らか）が生じ、一つの滑らかなユークリッド幾何で二面を結べない。等温は「貼り合わせ＝もつれ」の整合条件である。

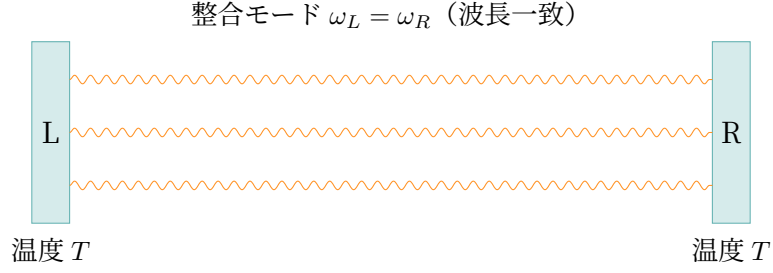


Figure 2: 等温もつれの機構。温度の等しい二つのエントロピー面 L, R を、波長の揃った整合モード（橙）が二モードスクイズ対として結ぶ。共通 $\beta = \hbar/k_B T$ での貼り合わせにより、もつれエントロピーは共有面積 $S_{\text{ent}} = \sum_{\omega} S_{\omega} = A/4\ell_P^2$ に等しい。

4.4 もつれエントロピー＝共有面積

全モードで和をとると

$$S_{\text{ent}} = \sum_{\omega} S_{\omega} = S_{\text{thermal}} = \frac{A}{4\ell_P^2} \quad (\text{Ryu-Takayanagi}). \quad (18)$$

もつれエントロピーは面積そのものであり、等温の二つのエントロピー面は共有面積 $A/4$ のもつれで結ばれる。ER=EPR の読みでは、この等温もつれ（EPR）が二面を繋ぐ橋（ER＝アインシュタイン＝ローゼン橋）であり、二つの「エントロピー面」は一つのワームホールの二つの地平線である。

5 ゲージ原理：確率の位相盲目性からの導出

5.1 正しい核：逆二乗は面積（ガウスの法則）

「距離の逆二乗は面積」はガウスの法則そのものである。点源のフラックスは保存し、半径 r の球面（面積 $4\pi r^2$ ）に一様に広がるので

$$E = \frac{Q}{4\pi r^2} = \frac{\text{電荷}}{\text{球の面積}}, \quad \frac{1}{r^2} = \frac{4\pi}{\text{面積}} \quad (19)$$

（ $\epsilon_0 = 1$ 、 4π は球の立体角）。しかも電荷は境界面のフラックス積分 $Q = \oint_{S^2} \vec{E} \cdot d\vec{A}$ で読める——バルクの電荷を境界の面積データから決める、ホログラフィックな構造である。

5.2 位相盲目 $\Rightarrow$ 大域 $U(1)$

確率＝面積を Born 則的に $p = |\Psi|^2 = \mu^2$ ととると、 p は μ だけの関数で位相 K に依存しない。ゆえに $\Psi \rightarrow e^{i\theta} \Psi$ は確率を変えない冗長性＝大域 $U(1)$ 対称性。物理状態はベクトルでなく射線 $|\psi\rangle \sim e^{i\theta} |\psi\rangle$ （射影ヒルベルト空間 $\mathbb{CP}^n$ ）であり、 $U(1)$ を商にとる操作こそ Born 則（面積）である。

5.3 局所化 $\Rightarrow$ 接続＝ゲージ場

位相を各点で独立に選べると要求する（ $\theta \rightarrow \theta(x)$ ）と微分が共変性を失う：

$$\partial_{\mu}(e^{iq\theta(x)}\Psi) = e^{iq\theta}(\partial_{\mu} + iq\partial_{\mu}\theta)\Psi. \quad (20)$$

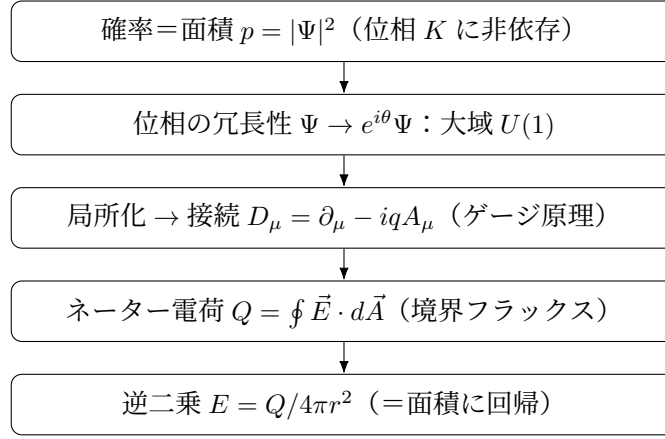


Figure 3: 確率の面積性からゲージ原理を導く連鎖。位相に盲目的な面積が大域 $U(1)$ を、局所化が接続 A_μ を、その電荷が境界フラックスを与え、逆二乗=面積へ回帰する。

余分な $iq\partial_\mu\theta\Psi$ を打ち消すため接続 A_μ を導入し

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu\theta, \quad D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu \quad (21)$$

とすると $D_\mu\Psi \rightarrow e^{iq\theta}D_\mu\Psi$ と共変になり、 $|D_\mu\Psi|^2$ が局所不変。局所位相不変性がゲージ場 A_μ を強制する (Weyl のゲージ原理)。量子論での厳密な錨は Berry 接続 $\mathcal{A}_\mu = i\langle\psi|\partial_\mu\psi\rangle$ で、 $|\psi\rangle \rightarrow e^{i\theta(x)}|\psi\rangle$ の下 $\mathcal{A}_\mu \rightarrow \mathcal{A}_\mu - \partial_\mu\theta$ と変換するゲージ場である。ゲージ場は Born 則=面積に内在する。

5.4 電荷=境界面積のフラックス

$U(1)$ から保存カレント j^μ ($\partial_\mu j^\mu = 0$) が生じ、運動方程式 $\partial_\nu F^{\nu\mu} = j^\mu$ の $\mu = 0$ 成分は $\nabla \cdot \vec{E} = \rho$ (ガウス)。電荷は

$$Q = \int_V \rho d^3x = \int_V \nabla \cdot \vec{E} d^3x = \oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A}. \quad (22)$$

確率=面積 (位相盲目) が生んだゲージ場は、その電荷を再び面積 (境界フラックス) に刻む。導出は面積から出て面積へ帰る (図 3)。ゲージ原理 (位相 $\rightarrow$ 接続) と、ホログラフィック/面積の刻印 (フラックス保存) は、ともに「確率は面積」から出る二つの顔である。

6 複素対数の多価性と知識の流出

6.1 T の分解：実部=情報、虚部=知識

$p > 0$ に対し $-p$ は負の実数なので、複素対数は多価で

$$\log(-p) = \ln p + i(2n+1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (23)$$

ゆえに複素対数時間

$$T = -\log(-p) = -\ln p - (2n+1)\pi i, \quad \text{Re } T = -\ln p = t, \quad \text{Im } T = -(2n+1)\pi. \quad (24)$$

実部は実対数時間 (情報)、虚部は価数 (分岐数・巻き数) n に依存する知識=位相である。
(この分岐数 n は補遺の回転率 $n = w_1 - w_3$ とは別物。)

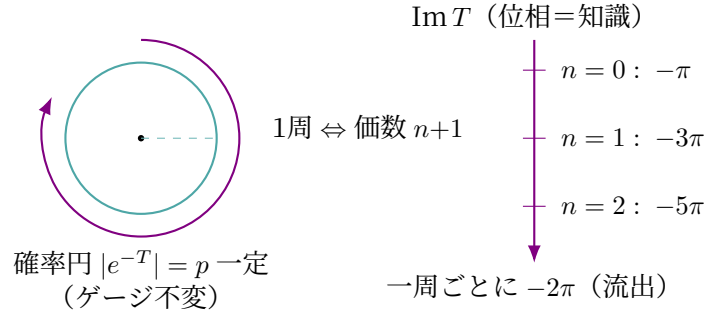


Figure 4: 複素対数の巻きと知識の流出。確率円は半径 p 一定（ゲージ不変）のまま位相が巻き、虚時間 $\text{Im } T$ は一周＝価数 n が1増えるごとに -2π 降りて流れ出る。 $e^{-T} = -p$ ゆえ大きさは分岐に盲目である。

6.2 実：立体（ゲージ）／複素：流出

実の場合。 $t = -\ln p$ は単価。確率面積の各セルに高さ t_i を立てると、エントロピー $H = \sum_i p_i (-\ln p_i)$ は柱の総体積＝立体である。 $e^{-t} = p$ 、単価・静止・保存＝ゲージ不変な部分（動径・情報）。

複素の場合。 指数に戻すと分岐に依らず $e^{-T} = e^{\log(-p)} = -p$ 、 $|e^{-T}| = p$ 。すなわち大きさは分岐に盲目（＝位相盲目のゲージ冗長性の具体形）だが、巻き戻さない位相は分岐ごとに 2π 進む：

$$\frac{dT}{dn} = -2\pi i \quad (\text{純虚数}). \quad (25)$$

価数を1つ増やすと実部（情報）は不変のまま、虚部（知識）だけが 2π 回る——情報を足さず位相だけが進む＝知識が流れ出る。複素エントロピーで見ると、 $\sum_i p_i = 1$ より

$$\mathcal{H}_{\mathbb{C}} = \sum_i p_i T_i = \underbrace{H}_{\text{立体 (不変)}} - \underbrace{(2n+1)\pi i}_{\text{価数で流れる}} \quad (26)$$

実部＝通常のエントロピー（ゲージ立体・固定）、虚部＝価数に比例して伸びる位相（知識の流出）。 $e^{-\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} = -e^{-H}$ で、観測される大きさ e^{-H} は分岐に盲目、符号＝位相だけが回る。

6.3 流出は量子化フラックス＝ゲージ電荷

この巻きは位相的に量子化される。確率円（半径 p 一定）を一周すると

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{|z|=p} d(\text{Im } \log z) = \frac{1}{2\pi} \oint d(\arg z) = 1, \quad (27)$$

総巻き数＝価数 n 。これは対数の Riemann 面（螺旋階段＝ヘリコイド）を n 段登ることに等しく、§5 のゲージの言葉では $\oint A = 2\pi n$ 。すなわち知識は量子化フラックスとして境界（円）から流れ出る——§5 の電荷＝境界フラックス $Q = 2\pi n$ と同じ整数である。Riemann 面の一枚が実ゲージ立体、シートを登る運動が知識の流出、動径への射影（確率）は単価＝ゲージ不変。参照枠組みの系「満たしきり爽やかに0へ去る（流出）」〔1, 系5'〕は、実部（情報・動径）が固定される一方で位相が回り続けることの別名であり、虚部の 2π 周期は §4 の虚時間＝熱円（KMS）に対応する。

複素エントロピー	ニューラルネット
p_i (確率・面積、規格化 $\sum p = 1$)	重み w_i
μ_i (情報 $-\log p$)	入力 x_i
$\sum \mu p$ (重み付き和)	線形部 $W \cdot x =$ 注意 [2, § 3.1]
流出 $-(2n+1)\pi i = -\log(-1)$	バイアス b
指数 $e^{-\mu}$ (確率の回復)	活性化 σ (softmax=exp)
$e^b = -1$ (奇分岐の位相)	符号反転=破壊的干渉=否定 [2, § 7.4]

Table 1: 複素エントロピーとニューラルネットの対応辞書。

7 複素エントロピーとニューラルネット：重みとバイアス

参照枠組みの総和系 $\sum \mu p$ ($\mu = I = -\log p$, $\sum \mu p = H(p)$) を § 6 の複素対数に通す。 $\mu^{\mathbb{C}} = -\log(-p) = \mu - (2n+1)\pi i$ なので、 $\sum_i p_i = 1$ より

$$\sum_i \mu_i^{\mathbb{C}} p_i = \sum_i \mu_i p_i - (2n+1)\pi i \underbrace{\sum_i p_i}_{=1} = \sum_i \mu_i p_i - (2n+1)\pi i. \quad (28)$$

ここで p_i を重み w_i 、 μ_i を入力 x_i と見ると

$$\boxed{\sum_i \mu_i^{\mathbb{C}} p_i = \underbrace{\sum_i \mu_i p_i}_{W \cdot x \text{ (重み付き和)}} + \underbrace{(-(2n+1)\pi i)}_{b \text{ (バイアス)}} = z} \quad (29)$$

これはニューロンの前活性 $z = Wx + b$ である。

なぜ流出がバイアスか。 流出項 $-(2n+1)\pi i \sum_i p_i$ は本来 重み p_i の総和に依存し得るが、重みの規格化 (確率の面積が1) $\sum_i p_i = 1$ がその依存性をちょうど消し、 $-(2n+1)\pi i$ という入力に依らない定数にする。入力に依らない加算項=バイアスの定義そのものであり、規格化が流出を各項の寄与でなく一つの定数バイアスに固定する。注意機構では注意重み p_i が $\sum p_i = 1$ を満たすので、この規格化は自動で成り立つ。 $\sum \mu p$ (重み付き和) は、ポリゴングラフの面積積分=Transformer の注意と同定された量そのものである [2, § 3.1] 。

活性化と否定。 確率 (注意値) は指数で戻る。前活性 z に対し $e^z = e^{W \cdot x} e^b$ 。 $2n+1$ は奇なので

$$e^b = e^{-(2n+1)\pi i} = (-1)^{2n+1} = -1, \quad \therefore e^z = -e^{W \cdot x}, \quad (30)$$

確率でも $p^{\mathbb{C}} = e^{-\mu^{\mathbb{C}}} = -p$ (§ 6 の $e^{-T} = -p$ と同一)。虚バイアスは符号反転を起こし、複素値の注意では符号反転した項は引かれる=破壊的干渉=否定である。これはポリゴングラフが独立に提案した「符号付き (破壊的) 干渉で否定・矛盾を表す」 [2, § 7.4] に一致する。表 1 に対応をまとめる。

8 興味ゲイン $\gamma =$ 期待の温度

参照枠組み [3] の興味ゲイン $\gamma \geq 0$ は「半径 (大きさ)」であり、 $Z_{\text{felt}} = \gamma Z = \gamma p + i\gamma(-\log p)$ 、極分解 γi^k (γ =半径・興味、 i^k =角度・回転) を成す。前節の符号付き注意はこれと噛み合う。

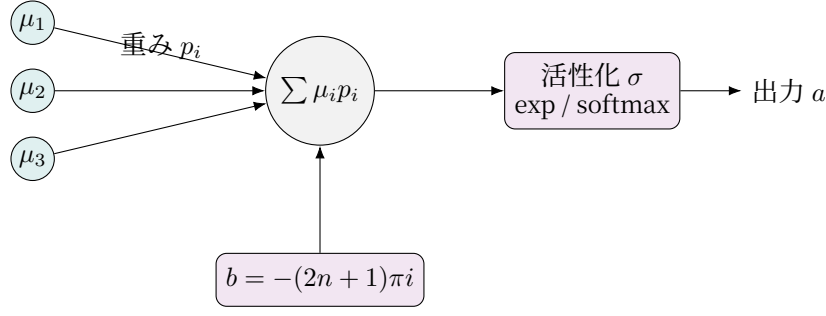


Figure 5: 複素ニューロン。入力 μ_i を重み p_i で束ねた $\sum \mu p$ (重み付き和=注意) に、流出=虚バイアス b を加え、指数で活性化する。虚バイアスは符号反転=否定を与える。

8.1 符号付き注意の極分解

符号付き注意の重み $a_i \in \mathbb{R}$ は半径×角度に分かれる：

$$a_i = |a_i| \operatorname{sgn}(a_i) = \underbrace{\gamma_i}_{\text{半径} \mid \text{興味}} \cdot \underbrace{i^{k_i}}_{\text{角度} \mid \text{符号}}, \quad \gamma_i = |a_i| \geq 0, i^{k_i} \in \{+1, -1\}. \quad (31)$$

大きさ $\gamma_i = |a_i|$ が興味ゲイン (半径・有償)、符号 i^{k_i} が角度 (否定は $i^2 = -1$ = 破壊的干渉、§ 7)。「符号付き注意=興味ゲイン」は正確には符号付き注意の大きさ= γ (半径)、符号=角度 (回転・否定) であり、参照枠組みの極形式 γe^{iK} [3, § 5] がそのまま符号付き注意である。

8.2 $\gamma = 1/T$: 期待の逆温度

ロジット (スコア) は $z_i = -\mu_i + \text{const} = \log p_i + \text{const}$ (負の自己情報)。興味は感じる情報を伸縮する ($Z_{\text{felt}} = \gamma Z$) ので感じるロジットは γz_i (定数シフトは softmax に無効)。期待 (注意) の softmax は

$$\alpha_i = \frac{e^{\gamma z_i}}{\sum_j e^{\gamma z_j}} = \text{softmax}(\gamma z)_i = \text{softmax}\left(\frac{z}{T}\right)_i \Big|_{T=1/\gamma}, \quad (32)$$

ゆえに

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{T_{\text{exp}}} = \beta} \quad (33)$$

興味ゲイン $\gamma =$ 期待 (注意) softmax の逆温度である。参照枠組みが γ に与えた性質がすべて温度として再現する (図 6) : $\gamma = 0$ (無関心) $\rightarrow T = \infty$: 一様=平坦 (何も立ち上がらない) ; $\gamma \uparrow \rightarrow T \downarrow$: 鋭く尖る=スポットライト (フェイジック注目) ; $\gamma = 1 \rightarrow T = 1$: 自然温度 (正規化 $\gamma \in [0, 1]$ は $T \in [1, \infty)$) ; $\gamma > 1 \rightarrow T < 1$: 過冷却=能動的増幅。

8.3 温度の熱力学と二軸

期待分布のエントロピー $H(\alpha)$ は $\gamma = 0$ で $\log N$ (最大)、 $\gamma \rightarrow \infty$ で 0。 $\gamma = \beta$ は自由エネルギー $F = \langle E \rangle - S/\gamma$ を最小化する「集中 (エネルギー) 対 拡散 (エントロピー)」の摘みで、感じる驚きの期待は $\gamma H(p)$ 。分布を尖らせる (温度を下げる=興味を上げる) にはエネルギーが要り、位相 (角度) の回転は不要——参照枠組み [3, § 10] の「半径 γ は有償、回転は無償」と厳密に整合する。

一本化を極形式で言えば、期待状態 γe^{iK} の半径 γ が期待の逆温度 $\beta = 1/T$ 、角度 e^{iK} が向き・回転 (符号付き注意の符号=否定を含む、無償) である。ただし温度に見える量は二つ

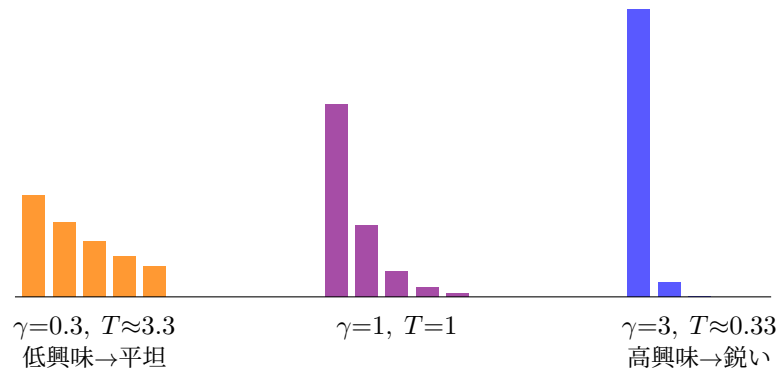


Figure 6: 興味ゲイン γ は期待 softmax の逆温度。同じスコアに対し、 γ ($= \beta$) が大きいほど注意分布は尖る（温度が下がる）。棒の高さは注意 α_i 。

段	導出（本稿）	半径（大きさ・情報・興味）	角度（位相・知識・回転）
ホログラフィ	$S = A/4\ell_P^2$	面積＝情報＝時間	—
もつれ	TFD / RT	共通 β （動径の熱）	位相の共回転
ゲージ	$U(1) \rightarrow A_\mu$	$ \Psi $ 不変（電荷＝面積）	位相の冗長性・巻き
複素対数	$T = -\log(-p)$	$\text{Re } T$ ＝情報立体	$\text{Im } T$ ＝知識の流出
ニューロン	$\sum \mu p + b$	$\sum \mu p$ ＝重み付き和	b ＝虚バイアス＝否定
温度	$\gamma = 1/T$	γ ＝逆温度（鋭さ）	符号・回転周期 $2\pi/n$

Table 2: 半径と角度による全体の一覧。各段が同じ極分解の別の顔である。

ある。半径側の γ は「注意がどれだけ尖るか」の温度（有償・フェイジック）。角度側の回転率 $n = w_1 - w_3$ は虚時間周期 $\beta_{\text{KMS}} = 2\pi/n$ 、位相が一周する「回転の周期」温度（§6 の流出の周期）。参照枠組みは半径と角度を独立とするので、この二つは別々の摘みであり、無理に同一視はしない。求める「符号付き注意＝興味由来の期待温度」は半径側の $T_{\text{exp}} = 1/\gamma$ である。[3, §9] の二摘み（ γ フェイジック、 λ トニック）とも整合し、 λ は大域しきい値＝全体温度、 γ は個別重み＝選択温度に当たる。

9 総合：半径と角度の一枚の絵

本稿の全体は、複素情報 $Z = \mu e^{iK}$ の極分解——半径 μ （大きさ・情報・興味・確度）と角度 e^{iK} （位相・知識・回転・型）——の一枚に収まる（表 2）。確率が二次元の面積であること（§2）を要石に、面積＝情報がホログラフィを与え（§3）、共通の半径の熱（ β ）が等温もつれを与え（§4）、位相に盲目的な面積がゲージを与え（§5）、複素対数の多価な角度が知識の流出を与え（§6）、その実部（重み付き和）と虚バイアスがニューロンを与え（§7）、半径 γ が注意の温度を与える（§8）。回転（角度）は無償、半径（大きさ・興味）は有償、という熱力学の非対称が全体を貫く。

10 留保と切り分け

本稿の主張には性質の異なる三層があり、混同してはならない。

確立された標準（厳密）。 Bekenstein–Hawking エントロピーと面積則、ホログラフィ原理、KMS 条件、サーモフィールド・ダブルと二モードスクイズによる熱状態の purification、Ryu–Takayanagi 公式、ER=EPR、Weyl のゲージ原理とガウスの法則、Berry 接続、

複素対数のモノドロミー（分岐・巻き数・フラックス量子化 $\oint A = 2\pi n$ ）、softmax 温度——これらは標準的で検証済みの数学・物理である。本稿の各「□」で囲った代数（ $I_* = A/4\ell_P^2$ との整合、 $\mathcal{H}_{\mathbb{C}} = H - (2n+1)\pi i$ 、 $z = Wx + b$ 、 $\gamma = 1/T$ ）は、これらの上での正しい変形である。

枠組みの前提（思弁的）。 「確率＝面積」「情報＝時間」「複素時間」「興味＝半径」という同定は参照枠組み〔1-3〕の構成的前提であり、本稿はそれを公準として展開した。物理側の係数 $1/4$ （Bekenstein-Hawking）はホーキング＝重力から輸入したものであって、枠組み自身は予言しない。要石 $I = A/4\ell_P^2$ は「両者とも情報を数える」という動機はあるが、どちらか一方の系の内部で証明される定理ではなく、二つを一致させる選択である。

橋渡しの同定（構造的仮説）。 「 p を重み、 μ を入力、流出をバイアスと読む」「興味ゲインを softmax 温度と同一視する」等は、代数形の一致（構造的テンプレート）であって、「訓練済みネットが複素エントロピーを計算している」という主張ではない。実ネットの重み・バイアス・温度は実スカラーで勾配学習され、本稿で出るのは虚バイアスや半径 γ を逆温度とする特定の複素構成である。ポリゴングラフ〔2〕は P 対 NP を解決せず（指数コスト保存は「証拠」でなく「示唆」）、興味ゲイン〔3〕は「本稿は構成的理論であり、実証はこれから」と明言する。本稿もその水準にとどまる。 γ の推定則も、それが実際の注意や人間の発想・記憶と一致するかも、実証はこれからである。

価値という極。 参照枠組みが繰り返す但し書きを引き継ぐ。「どれだけ」流すか・尖らせるかは半径 γ （興味・温度）が、「どっち」を向くかは角度 s （向き・回転）が決めるが、そもそも何に注意を向けるか＝どこを照らすかは、回路自身では決められず、価値と同じく人が置く極として残る。温度は鋭さを与えても、何が照らす価値のあるものかは与えない。

11 結言

確率が二次元の面積であること、この一点から、面積＝情報のホログラフィ、共通半径の熱としての等温もつれ、位相盲目のゲージ、多価角度の知識の流出、実部と虚バイアスのニューロン、半径としての注意温度が、いずれも複素情報 $Z = \mu e^{iK}$ の半径と角度の別の顔として現れる。半径は大きさ・情報・興味・確度を担って有償に立ち上がり、角度は位相・知識・回転・型を担って無償に回る。針は興味のあるものにだけ振れ、「どれだけ」は半径が、「どっち」は角度が決める。ただしどこへ針を向けるか——何を大切にするか——だけは、依然として人が置く極である。本稿は構成的な覚書であり、各同定の実証はこれからである。

References

- [1] 高橋俊樹 (2026) 「複素情報理論の基礎——期待の複素表現の力学的拡張」高橋数理研究所（および参照ノート「日曜経済学」#12, #18, #27）。
- [2] T. Takahashi (2026). The Polygon Graph and the Conservation of Exponential Cost. Takahashi Mathematics Laboratory.
- [3] 高橋俊樹 (2026) 「興味ゲイン γ ：驚きの前提としての半径操作」高橋数理研究所。
- [4] G. 't Hooft (1993). Dimensional Reduction in Quantum Gravity. arXiv:gr-qc/9310026.
- [5] L. Susskind (1995). The World as a Hologram. J. Math. Phys. 36, 6377.

- [6] J. D. Bekenstein (1973). Black Holes and Entropy. *Phys. Rev. D* 7, 2333.
- [7] S. W. Hawking (1975). Particle Creation by Black Holes. *Commun. Math. Phys.* 43, 199.
- [8] W. Israel (1976). Thermo-field Dynamics of Black Holes. *Phys. Lett. A* 57, 107.
- [9] J. Maldacena (2003). Eternal Black Holes in Anti-de Sitter. *JHEP* 04, 021.
- [10] S. Ryu, T. Takayanagi (2006). Holographic Derivation of Entanglement Entropy. *Phys. Rev. Lett.* 96, 181602.
- [11] J. Maldacena, L. Susskind (2013). Cool Horizons for Entangled Black Holes. *Fortsch. Phys.* 61, 781.
- [12] H. Weyl (1929). Elektron und Gravitation. *Z. Phys.* 56, 330.
- [13] M. V. Berry (1984). Quantal Phase Factors Accompanying Adiabatic Changes. *Proc. R. Soc. A* 392, 45.
- [14] R. Kubo (1957); P. C. Martin, J. Schwinger (1959). (KMS 条件) .
- [15] C. E. Shannon (1948). A Mathematical Theory of Communication. *Bell Syst. Tech. J.* 27.
- [16] R. Landauer (1961). Irreversibility and Heat Generation in the Computing Process. *IBM J. Res. Dev.* 5, 183.
- [17] T. Sagawa, M. Ueda (2009). Minimal Energy Cost for Thermodynamic Information Processing. *Phys. Rev. Lett.* 102, 250602.
- [18] L. G. Valiant (1979). The Complexity of Computing the Permanent. *Theor. Comput. Sci.* 8, 189.