

対数航行の軌跡学

——地平面の選び方が定める螺旋の分類：実・虚・価・位・波・巻の六軸をめぐって——

複素情報理論 [1-3] の枠組みに基づく、探索的対話のまとめ（覚書） 2026年7月

抄録. 本稿は、複素情報 $Z = \mu e^{iK}$ の枠組み [1-3] を土台に、探索的対話で得られた一連の結果を「分類」としてまとめた覚書である。問いは一つ——航行の下敷きにする二軸（地平面）の選び方が、対数航行の軌跡の形をどう定めるか。実・虚・価・位・波・巻という軸の階梯を導入し、各二軸の組が円柱らせん・対数螺旋・正弦波・崩壊のいずれを生むかを、少数の判定原理に還元する。中心的な結論は、螺旋を開くのは軸の名づけでも価数でもなく、次の三点だけに懸かる、というものである：(i) 大きさを預かる実軸を地平面に残すか外すか、(ii) 独立な向きが二本あるか、(iii) 単調に増える登り軸（価）を含むか。最後に、確立された数学と枠組みの思弁的前提と橋渡しの同定を切り分ける。

1 序：枠組みと問い

出発点は極分解である。任意の複素量は半径と角度に分かれ、

$$Z = \underbrace{\mu}_{\text{半径：大きさ・情報・確度}} \times \underbrace{e^{iK}}_{\text{角度：位相・知識・型}} .$$

半径は「どれだけ」を、角度は「どっち」を担う [1]。型は $\times i$ の四半回転が巡らせ、確度は $K = -i \log p$ 、興味ゲイン γ は半径として感じられる情報 $Z_{\text{felt}} = \gamma Z$ をゲートする [2,3]。対数航行 $L[p] = \sum_i p_i (-\log p_i)$ は、確率＝面積の各セルに高さ＝情報を立てて総和する操作で、複素対数時間 $T = -\log(-p) = -\ln p - (2n+1)\pi i$ の多価性により、価数 n （巻き数）が一つ増えるごとに位相が 2π 降りて知識が流出する ($dT/dn = -2\pi i$) [1]。この螺旋階段（ヘリコイド）が本稿の舞台である。

本稿が一貫して問うのは次である。ヘリコイドを組むとき、どの二軸を地平面（床）にとるかで、航行の軌跡はどんな曲線になるか。素朴には「巻けば円、伸びれば螺旋」だが、実際には床の二軸の型が形を決め、円柱らせん・対数螺旋・正弦波・崩壊が場合分けとして現れる。

2 軸の階梯：六つの軸

まず登場する軸を、 $\times i$ （四半回転）と $\exp$ （丸め込み）で結んだ階梯として整理する（図 1）。四半回転 $\times i$ は周期 4 で単位円上の四点＝四つの型を巡らせる（図 2）。

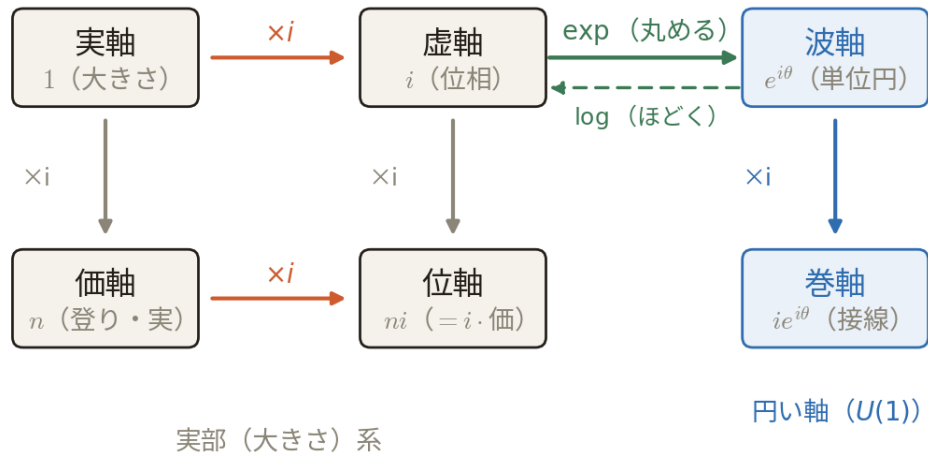


Figure 1 軸の階梯。実軸に $\times i$ を掛けると虚軸、価軸（登り・実）に掛けると位軸 ni 。虚軸を $\exp$ で丸めると波軸（単位円）、その $\times i$ が巻軸。log は波をほどいて虚に戻す。

六軸の性質を表1にまとめる。要点は、実と価は実（大きさ）型、虚と位は虚（位相）型、波と巻は円い軸（単位円= $U(1)$ ）だということである。

軸	単位	型	担うもの
実軸	1	実（直線）	大きさ・確率 ($\ln z $)。分岐に不変（ゲージ不変）。
虚軸	i	虚（直線）	位相 $\theta = \arg z$ 。巻きの向き。
価軸	n	実（直線・登り）	巻き数=オドメーター $\Phi = 2\pi N$ 。単調に増える。
位軸	ni	虚（直線）	$= i \cdot \text{価}$ 。虚軸上に乗る（位相の別表現）。
波軸	$e^{i\theta}$	円 (S^1)	位相を丸めた単位円 $= \exp(\text{虚})$ 。
巻軸	$ie^{i\theta}$	円 (S^1)	波の接線=速度 $= e^{i(\theta+\pi/2)}$ 。 $ c = 1$ 。

Table 1 六つの軸とその型。実型は大きさを、虚型は位相を担い、円い軸は $\exp$ で位相を巻き込んだ形。

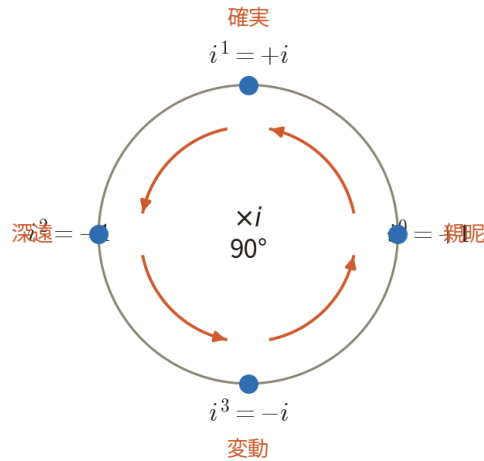


Figure 2 $\times i$ の型の輪。四半回転が親昵(+1)→确实(+i)→深遠(-1)→変動(-i)を周期 4 で巡らせる。 $\times i$ は単位円上に閉じている。

3 判定原理

個別の結果は、次の少数の原理に還元される（図 3）。

- (P1) **実軸＝大きさの錨**. 地平面が大きさを預かる実軸を含み、巻きがそれに直交する向きで起きるなら、動径は凍り、軌跡は円（円柱らせん）。「大きさは分岐に盲目」〔1, § 6.2〕がこれである。
- (P2) **二本の虚で動径が解ける**. 実軸を外し、地平面が異なる虚軸二本のとき、動径を預かる軸がないので巻きが大きさに漏れ、対数螺旋 $r = ae^{b\theta}$. 二虚単位の積が双曲単位 $(ij)^2 = +1$ （交換）になるのが芯。反交換 $(ij)^2 = -1$ なら半径有界のまま流出先が第三軸へ移る。
- (P3) **面には独立な二方向が要る**. 同じ一本の軸を二度とると平面にならず、軌跡はその線上に崩壊する。価数（大きさ）を変えても向きは増えない。
- (P4) **登り軸（価）を含めば側面図＝正弦波**. 価軸は単調に増える登り（オドメーター）で戻らない。閉じた円は座標が戻ることを要するから、価を含む面はどれも側面図＝正弦波になる。

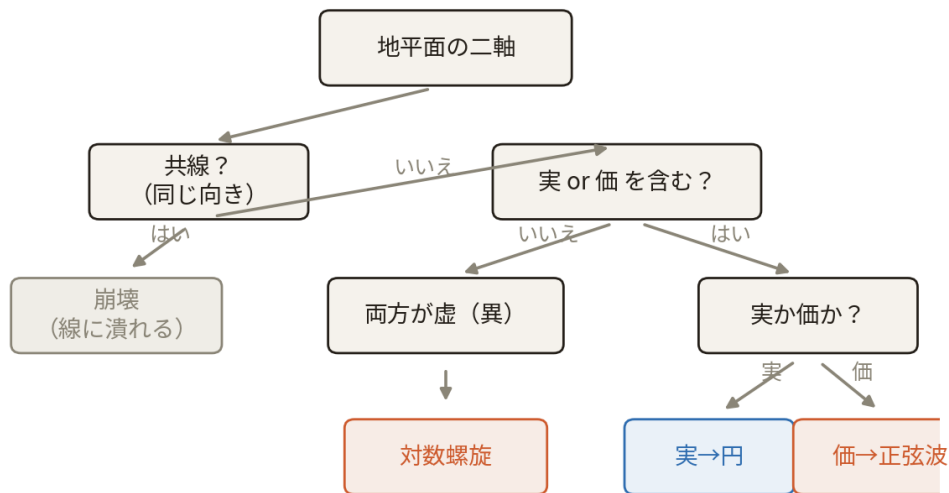


Figure 3 判定の流れ。共線なら崩壊、実か虚を含めば円か正弦波、両方が異なる虚なら対数螺旋。

4 各地平面の軌跡

4.1 実×虚：円柱らせん (基準)

標準のヘリコイドである。実軸が不変の動径 p を預かり、虚軸で位相が巻く。巻きは半径に直交するので大きさは凍り、軌跡は半径一定の円柱らせん。真上（床）から見れば円、走行距離 $\Phi = 2\pi N$ は向きを持たないオドメーターとして直交方向にただ伸びる（図 4）。

実×虚 → 円柱らせん（半径一定）

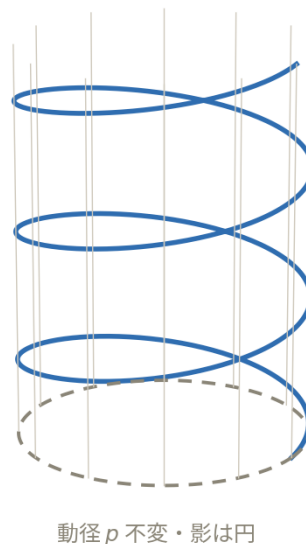


Figure 4 実×虚 → 円柱らせん。動径 p 一定、影は円。以降のすべての場合はこの基準からの変形として読める。

4.2 虚×虚：対数螺旋とトーラス

実軸を外し、地平面を異なる虚軸二本 i, j で張る (P2)。動径を預かる軸が消えるので巻きが大きさに漏れる。二単位が交換（双複素）なら $(ij)^2 = i^2 j^2 = (-1)(-1) = +1$ の双曲単位となり、 $e^{(ij)\varphi} = \cosh \varphi + (ij) \sinh \varphi$ で一巻きごとに動径が指数倍——対数螺旋（円錐らせん） $r =$

$ae^{b\theta}$ 。反交換（四元数）なら $(ij)^2 = -1$ で半径は有界のまま、流出先が第三軸 ij へ移り、二周波を同時に回せばトーラス上のコイルになる（図 5）。

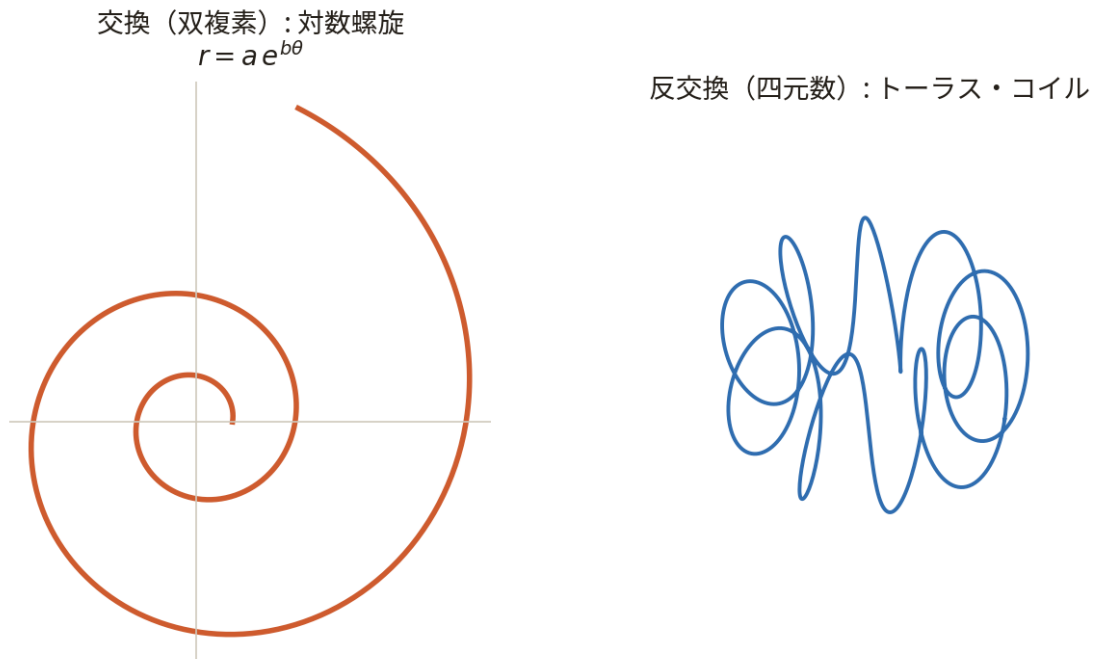


Figure 5 虚×虚。左：交換（双複素）→対数螺旋。右：反交換（四元数）→トーラス・コイル。実軸を外したことが動径を解放する。

4.3 実×位：円と、傾き一つ隣の螺旋

位数 ni は値として虚軸上に乗る ($ni = i \cdot n$)。したがって実×位は実×虚と同型で、実軸が大きさを凍らせ、軌跡は円柱らせん (P1)。ただし対数螺旋は「傾き一つ」隣にある：対数空間で実（大きさ）と位相を同時に進める斜線を $\exp$ が写すと、 $z = e^{b\theta} e^{i\theta} = e^{(b+i)\theta}$ 、すなわち対数螺旋になる（図 6）。実を凍らせて位相だけ回す純航行では円、実を傾ければ螺旋。

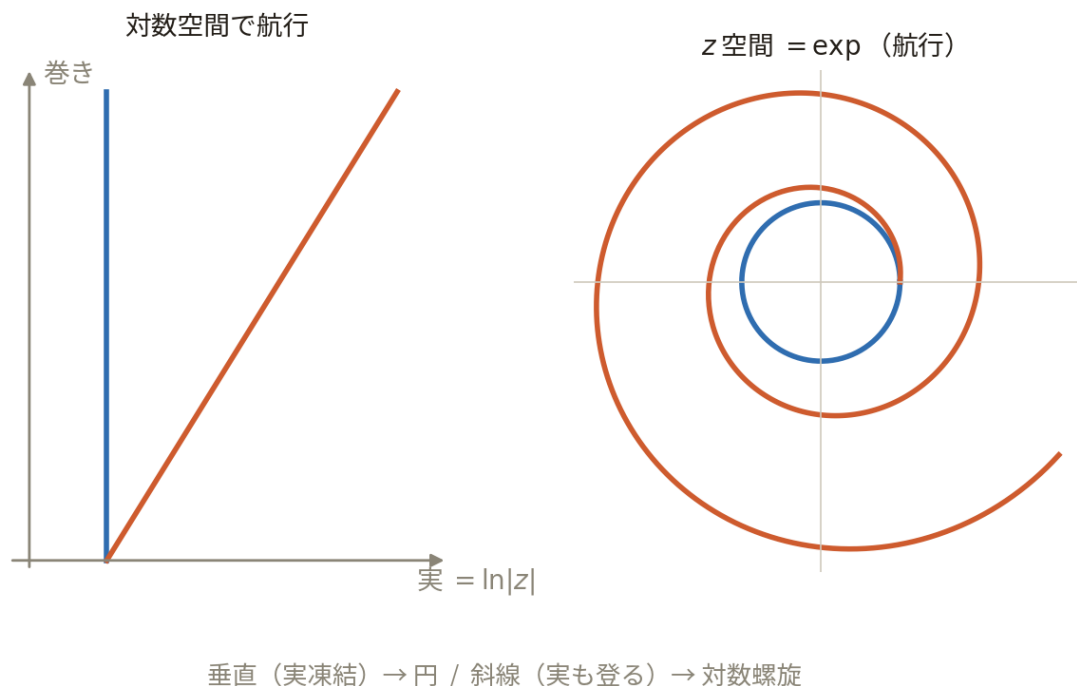


Figure 6 $\exp$ の作用。対数空間の垂直線（実凍結）は z 空間の円、斜線（実も登る）は対数螺旋になる。「傾き」が円と螺旋を分ける。

4.4 虚×位・位×位：螺旋と崩壊

位を虚とは独立な虚方向と見れば、虚×位 は実軸を欠く二虚＝対数螺旋（P2）。一方 位×位 は同じ一本の軸を二度なぞるだけで平面にならず、軌跡はその線上に崩壊する（P3）。図 7に、実軸あり→円、異なる虚二本→対数螺旋、同一軸→崩壊の三分を示す。



Figure 7 三分の分類。決めているのは軸の名づけではなく、実軸を含むか・独立な虚が二本あるか・同一軸を重ねていないか。

4.5 価を含む面：三つの影＝正弦波

価軸は位軸（ ni 、虚）とは別物で、価数 n を刻む実の登り軸（オドメーター）である。単調に増えて戻らないので、価を含む面はどれも側面図になり、閉じた円ではなく正弦波を描く（P4）。標準の円柱らせん $z = pe^{i2\pi s}$ （価軸の高さ s ）を三つの面に射影すると：真上（実×虚）から円、真横（実×価）から余弦波 $p \cos 2\pi s$ 、真横（虚×価）から正弦波 $p \sin 2\pi s$ 。振幅一定なのは「大きさは分岐に盲目」（動径不変）そのもの（図 8）。

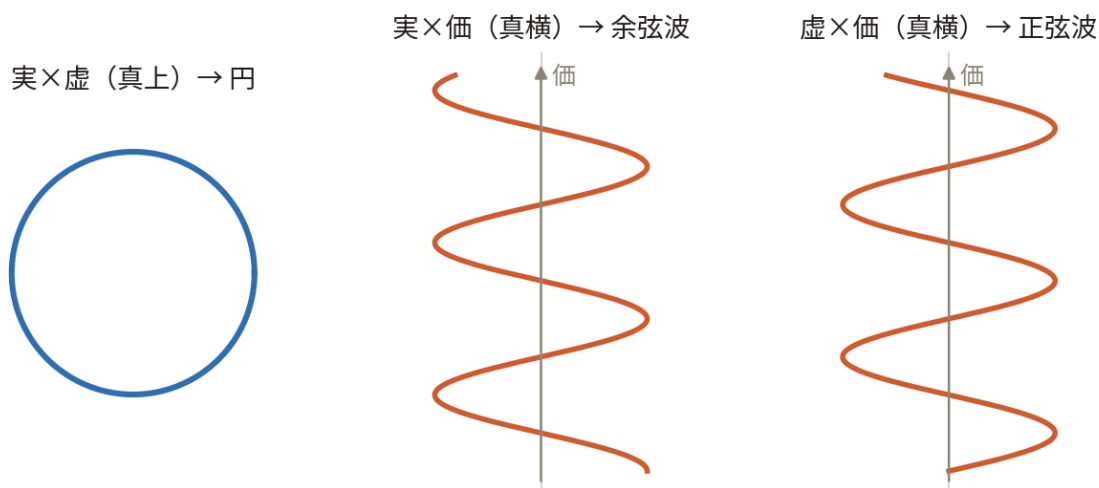


Figure 8 一本の円柱らせんの三つの影。上から円、横から余弦波・正弦波。上から見て円だったゲージ不変が、横から見れば振幅一定の正弦波にする。

4.6 位 (mi) × 位 (ni) ・ 価 (m) × 位 (ni) : 崩壊と正弦波

異なる価数 m, n を与えても、位 × 位 の崩壊は解けない。価数は位軸に沿った大きさ（どこまで巻いたか）であって向きではなく、 mi と ni はどちらも i 方向を指す共線ベクトルだからである (P3)。対照的に 価 (m) × 位 (ni) は、価が実の登り・位が虚で型が違うので面になる。ただし価が単調な登りである以上、出るのは円でなく正弦波で、波長は価数の比 $m:n$ が決める (P4 ; 図 9)。

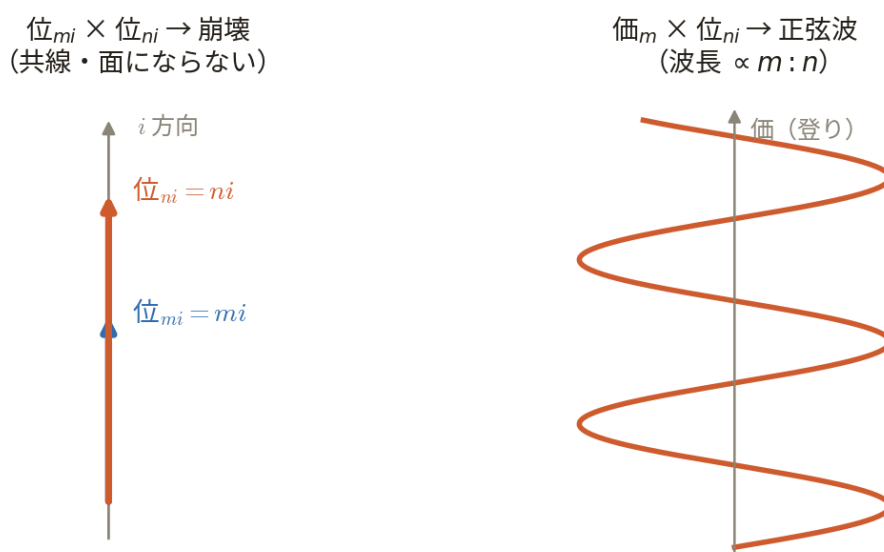
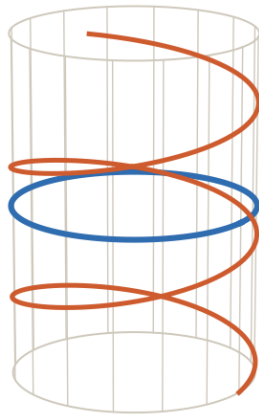


Figure 9 左：位(mi)×位(ni) は共線で崩壊。右：価(m)×位(ni) は正弦波（波長 $\propto m:n$ ）。価数を変えても次元は増えない。

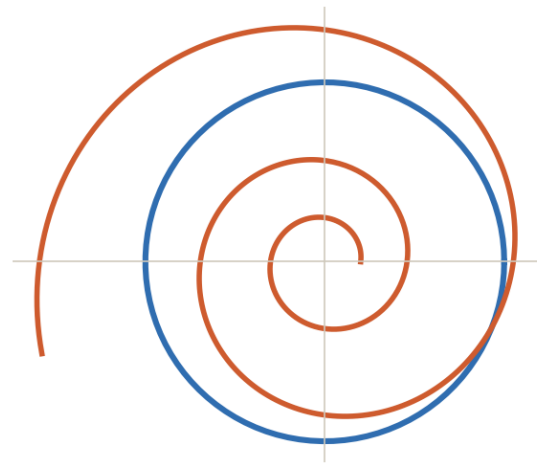
4.7 実×波：円柱と、その上の対数螺旋

波軸 $e^{i\theta}$ は位相を単位円へ丸めた軸で、 $e^{i\theta} = \exp(i\theta)$ すなわち位相の指数形である。対数航行 ($\log$) はその写像の逆—— $\log(e^{i\theta}) = i\theta$ が波をほどいて虚に戻すので、実×波 は $\log$ で 実×虚 に帰り、円 (P1)。新しいのは、波が円 (コンパクト) ゆえ 実×波 が張る地は平らな面でなく円柱 $\mathbb{R} \times S^1$ になることである。円柱上で水平に一周 (実凍結) すれば円、斜めに登るらせんを $\exp$ で写せば $z = e^{(b+i)\theta}$ の対数螺旋 (図 10)。対数螺旋は「一段の登り」だけ隣にある。

実×波 = 円柱 $\mathbb{R} \times S^1$



exp で z 空間へ



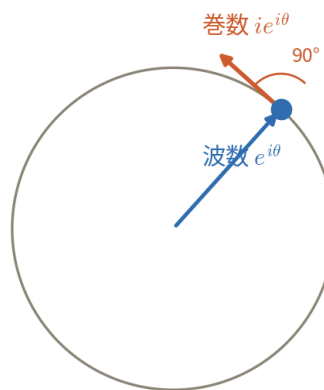
純巻き（実凍結）→ 円 / 傾き（実も登る）→ 対数螺旋

Figure 10 実×波 は円柱 $\mathbb{R} \times S^1$ 。水平な一周（青）は exp で円、斜めのらせん（橙）は対数螺旋。波軸は対数螺旋を傾き一つの距離に用意しておく軸。

4.8 実×巻：梯子の飽和

巻数 $c = ri = ie^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi/2)}$ は、虚数を掛けても $|c| = 1$ —— $\times i$ は 90° の回転であって拡大ではないから、巻軸は波軸と同じ単位円を $\pi/2$ 先行してなぞるだけ。実×巻 は 実×波 と同じ円柱で、実が動径を凍らせて円柱らせん。深い含意は、 $\times i$ の梯子がここで飽和することである：単位円は $\times i$ で閉じており（ $U(1)$ 、 i 自身が円の上にいる）、 $ie^{i\theta}$ は円の接線＝速度（ $= \frac{d}{d\theta} e^{i\theta}$ ）として、やはり円の外へ出ない。位相を円へ巻き込んだ後、 $\times i$ はもう新しい直交軸を生まず、円の内部対称性になる（図 11）。

実×巻 → 円（梯子の飽和）



$\times i$ は円の接線＝円の外へ出ない（ $U(1)$ 内）

Figure 11 実×巻 → 円。巻数 $ie^{i\theta}$ は波数 $e^{i\theta}$ の接線（ 90° 先行）で、単位円の外へ出ない。 $\times i$ の梯子は $U(1)$ で天井に達する。

5 総合：一枚の分類と貫く非対称

全結果を表 2 にまとめる。効いている軸はごく少ない。

地平面	軌跡	決め手
実 × 虚	円柱らせん	実が動径を凍結（基準）
虚 × 虚（異・交換）	対数螺旋	実なし→動径解放、双曲単位
虚 × 虚（異・反交換）	トーラス・コイル	実なし、 $(ij)^2 = -1$ で半径有界
実 × 位	円柱らせん	実が凍結（傾ければ螺旋）
虚 × 位（独立）	対数螺旋	実なしの二虚
位 × 位	崩壊（線）	面にならない
実 × 価・虚 × 価	正弦波（余弦・正弦）	価は単調な登り＝側面図
位(mi) × 位(ni)	崩壊（線）	共線；価数は大きさ $\neq$ 向き
価(m) × 位(ni)	正弦波	登り軸を含む（波長 $\propto m:n$ ）
実 × 波	円柱らせん	円柱 $\mathbb{R} \times S^1$ 、実が凍結
実 × 巻	円柱らせん	巻＝接線も $U(1)$ 内・梯子飽和

Table 2 地平面と軌跡の総覧。円・螺旋・正弦波・崩壊の四類は、P1-P4 の少数原理で尽くされる。

螺旋を開く鍵は、一貫して大きさを預かる実軸を巻きに巻き込むか否かにある。実軸を外す（虚 × 虚）、あるいは実を斜めに傾ける（実 × 位・実 × 波の円柱を斜めに登る）——どちらも同じ一点「動径を分岐に晒すか」に効いている。逆に、価数を増やしても次元は増えず（位(mi) × 位(ni))、単調な登り（価）を混ぜれば円は正弦波に開く。そして $\times i$ の梯子は、位相を単位円へ巻き込んだ波・巻で飽和する。

この非対称の底には、枠組みが繰り返す但し書きがある——回転は無償、半径は有償 [2,3]。回転 ($\times i$ 、単位円の内部) はエネルギーを要さず円の中で閉じる。動径を伸ばすこと（対数螺旋）は別途「登り」を要する。だから軌跡の分類は、そのまま「どこで大きさ（半径）に手を触れたか」の分類になっている。円は半径に触れない航行、対数螺旋は半径に登らせた航行、正弦波は登り軸を側面から見た姿、崩壊は面すら張れなかった場合——である。

6 留保と切り分け

本稿の主張は性質の異なる三層からなり、混同してはならない [1, § 7 ; 2, § 10 に倣う]。

確立された標準（厳密）。softmax 温度と値域 (0,1)、複素対数のモノドロミー（分岐・巻き数）、 $\exp/\log$ が直線に対数螺旋へ写すこと、双複素・四元数の代数 ($(ij)^2 = \pm 1$)、 $U(1)$ の閉性、ヘリコイドの幾何——これらは標準的で検証済みである。本稿の各軌跡（円・対数螺旋 $r = ae^{b\theta}$ ・正弦波・崩壊）は、与えられた代数モデルの上での正しい変形である。

枠組みの前提（思弁的）。「確率＝面積」「情報＝時間」「価数＝巻き数」「確度＝確率の小ささ」等の同定は参照枠組み [1-3] の構成的前提であり、本稿はそれを公準として展開した。

橋渡しの同定（構造的仮説）。「価数に i を付けた位軸」「波軸 = $\exp(\text{虚})$ 」「巻軸＝波の接線」といった軸の階梯、および各二軸をどの代数（交換／反交換、独立／共線）で実現するかは、代数形の一致に基づく選択であって実証ではない。とりわけ、二虚軸が双曲 (+1) に開くか楕円 (-1) に閉じるか——四元数拡張か双複素拡張か——は巻きの構造だけからは決まらず、外から置く選択である。この分岐点そのものが、枠組みの言う「回路の内側からは決まらず、外から置くしかない極」の一例になっている。本稿もその水準にとどまる、構成的な覚書である。

参考文献（枠組み）

- 〔1〕 高橋俊樹「確率の面積性と対数航行による複素エントロピーの構成」高橋数理研究所, 2026.
- 〔2〕 高橋俊樹「興味ゲイン γ ：驚きの前提としての半径操作」高橋数理研究所, 2026.
- 〔3〕 高橋俊樹「NAI×GAI から AGI へ——統合方程式 $dZ/dt = i(-\log p(Z))$ の上に建つ候補設計」高橋数理研究所, 2026.

注記：本稿は上記枠組みを土台に、探索的対話で得られた導出と分類をまとめたものである。確立された数学と、枠組みが置く思弁的前提と、両者を橋渡しする構造的同定は性質が異なり、第 7 節で区別した。図版はすべて本稿のために作図した。