

複素情報量の構成論

——二重重みによる拡張と、対数航行によるゼータの捻り——

高橋数理研究所*

2026年8月

抄録. 複素情報理論 [1,2] は、基本量を確度 $I = -\log p$ ただ一つ、複素重みを $s = m + ni$ ただ一つとする構成であった。本稿は、確率 p と情報量 $-\log p$ を実部・虚部へ配置する四通り ($p + ip$ 、 $-\log p + ip$ 、 $p - i \log p$ 、 $-\log p - i \log p$) を統一的に扱うため、基本量を二つ、複素重みを二つに増やす。第 I 部では複素時間 $T = \sigma_I I + \sigma_J J$ ($J = 1 - p$) を公理として置き、(i) 複素重みが $ds/dI = \sigma_I - s$ に従って走ること (本論の s はその不動点)、(ii) 四配置が「去るか/回るか」の四類型に一対一対応すること、(iii) 積 $-p \log p$ は単調性を欠くゆえ時間になれず体積すなわちエントロピーになることを導く。評価関数 [1] は減衰因子を関与因子 $G(I)$ に置換した形で拡張され、命題 1"~系 5" が同一の式から従う。第 II 部では、この確率部の捻りを対数航行 [3] で計算する。ゼータ集団では素の確率が $p_n = 1/n$ ゆえ確率はシフト作用素であり ($\hat{p}\zeta(s) = \zeta(s+1)$)、確率部は $e^{\sigma \hat{p}}$ として ζ をシフト ζ の級数へ捻る。 p の負号は $-\log(-p)$ の知識の流出に吸収され、実部=立体は不変のまま交代符号だけが k 段の流出として現れる。臨界線の $r = \operatorname{Re} s$ を確率と読むと、臨界帯は確率区間 $(0, 1)$ 、極 $s = 1$ は確実性、関数等式は $p \leftrightarrow J$ のゲージ双対、臨界線は $p = J = 1/2$ ——対数航行において柱の高さと柱の総体積が一致する唯一の線——として現れる。臨界帯を開くのは大きさではなく位相であり、各セルをリーマン面の一段ずつ上に置くと対数航行は $\operatorname{Re} s > 0$ で収束する。恒等式はすべて多倍長数値で検算した。零点の位置については何も主張しない。

キーワード：複素情報量, 二重複素重み, 複素時間, 対数階数, 走る重み, 対数航行, 確率の面積性, 知識の流出, シフト作用素, リーマンゼータ, 臨界帯, ツェリス統計, 評価関数

* 本稿は、高橋俊樹による複素情報理論 [1,2] および対数航行の構成 [3] を土台に、探索的対話で得られた一連の導出をまとめたものである。確立された標準 (複素対数のモノドロミー、 ζ の解析接続、ツェリス統計等) と、参照枠組みが置く構成的前提と、両者を橋渡しする同定は性質が異なる。第 19 節で総括的に、また各節の随所で明示的に区別する。数値はすべて多倍長演算で検算した (第 18 節)。

1. 序：位置づけと方法

1.1 主題

本シリーズ [1-3] は「確率は二次元の面積、情報量は一次元の時間、複素情報は半径と角度に分かれる」という一枚の図式を用いてきた。半径 μ が大きさ・情報・確度を、角度 e^{iK} が位相・知識・回転・型を担う [3, §1]。

この枠組みで基本量の一つ、複素重みも一つであった。すなわち複素情報量は

$$P = (m + ni) I, \quad I = -\log p (\geq 0), \quad s := m + ni$$

と書かれ、 s の実部が飽和率、虚部が角速度を与えた [2, §3]。しかし複素情報の構成には、より原初的な自由度がある。確率 p と情報量 $-\log p$ という二つの量を、実軸と虚軸にどう配置するかである。素朴に数えれば四通り：

$$p + ip, \quad -\log p + ip, \quad p - i \log p, \quad -\log p - i \log p.$$

〔1,2〕は最後の配置を、〔3〕は三番目の配置（定義 1 の $Z = p + i(-\log p)$ ）を用いている。本稿はこの四通りを、基本量を二つ、複素重みを二つに増やすことで統一的に扱う。

さらに、確率と情報量の積

$$-p \log p = -\log p^p$$

が「情報量の確率乗」であることの意味を問う。この量は対数航行〔3, 定義 2〕においてエントロピーとして現れるが、なぜ時間ではなく体積として現れるのか——本稿はこれに力学的な答えを与える（第 6 節）。

第 II 部では、第 I 部で得た確率部の捻りを、対数航行を計算装置として ζ 函数の上で具体的に実行する。参照ノートの主張〔8〕である臨界線 $r = 1/2$ の r を確率 p と読むとき、何が言えて何が言えないかを分離する。

1.2 方法上の注記

以下は参照枠組み〔1-3〕の定義を公準として展開する構成的な議論である。〔3, § 10〕の三層の切り分けを本稿も引き継ぐ。

- **確立された標準（厳密）**：複素対数のモノドロミー、ディリクレ級数と ζ の解析接続、 $\eta(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$ 、ツァリス統計、ジョルダン鎖と固有函数の代数。本稿の各恒等式はこれらの上での正しい変形であり、第 18 節で数値検算する。
- **枠組みの前提（構成的）**：「確率＝面積」「情報＝時間」「複素時間」という同定は〔1-3〕の前提であって定理ではない。
- **橋渡しの同定（仮説）**： $\text{Re } s = p$ （第 15 節）は構成的同定であり、 ζ の内部で証明される命題ではない。

参照ノートは符号の扱いが緩いため、情報時間の順方向および発展因子の向きは第 3 節で一箇所に固定する。

第 I 部 二重重みの構成論

2. 二つの基本量とその代数

同一命題の二つの見方〔6〕に、二つの量に対応する。以下を公理 (A0) として置く。

	蓋然 p	確度 I
正体	面積（2 次元）	時間（1 次元）
値域	$(0, 1]$ 有界	$[0, \infty)$ 非有界
合成	乗法的 $p_1 p_2$	加法的 $I_1 + I_2$
$D = d/dI$ の作用	$Dp = -p$ （固有函数、固有値 -1 ）	$DI = 1, D^2 I = 0$ （ジョルダン鎖）

表 1：二つの基本量。 D の下で両者は決して対等ではない。

すなわち I は生成子の座標、 p は生成子の固有函数である。この非対称性が以下すべての構造を決める。補助量として

$$J := 1 - p \in [0, 1), \quad dJ = p dI$$

を置く。 J は確率を計量因子とする固有情報時間である (I が非有界な座標時間、 J がその共形コンパクト化)。言い換えれば：

確率とは情報時空の共形因子である。

これが「確率は面積・情報は時間」[3, 定義 1] を四配置の言葉で言い直した姿にほかならない。

3. 二重複素重みと複素時間

複素時間を、二つの基本量の複素一次結合として定める。これを公理 (A3'') とする。

$$T = \sigma_I I + \sigma_J J, \quad \sigma_I = m_I + i n_I, \quad \sigma_J = m_J + i n_J.$$

$J(0) = 0$ ゆえ $T(0) = 0$ であり、これを正準ゲージとする。 p で書いた形 $P = \sigma_p p + \sigma_I I$ とは

$$\sigma_J = -\sigma_p, \quad P = T + \sigma_p$$

の関係にあり、両者は複素時間の原点の取り方（定数だけ）の違いである。[2, (A3)] は $\sigma_J = 0$ の切断にあたる。

発展の規約。[2, § 3] および [2, A.3] の向きづけを一箇所で固定するため、発展因子を

$$\Psi(I) = \Psi(0) e^{-\overline{T(I)}} = \Psi(0) \underbrace{e^{-\operatorname{Re} T}}_{\text{振幅の減衰}} \underbrace{e^{i \operatorname{Im} T}}_{\text{位相の前進}}$$

と書く。 $\sigma_J = 0$ のとき $e^{-\overline{sI}} = e^{-mI} e^{inI}$ となり [2, § 3] に一致する。以下

$$\operatorname{Re} T = m_I I + m_J J, \quad \operatorname{Im} T = n_I I + n_J J =: \Theta(I)$$

を用い、 Θ を累積位相と呼ぶ。

4. 対数階数と四つの配置

実軸・虚軸それぞれに $-\log$ を何回かけるかを 2 ビットで表し、そのビット対自体を複素数とみなす：

$$\nu = a + bi, \quad a, b \in \{0, 1\}.$$

これを対数階数と呼ぶ。序の四配置は ν の四値に対応する。

ν	形	実軸 (情報)	虚軸 (知識)	切断条件	集約 $\sum p Z$
0	$p + ip$	蓋然	蓋然	$\sigma_I = 0$	$(1 + i)\Gamma$
1	$-\log p + ip$	確度	蓋然	$m_J = n_I = 0$	$H + i\Gamma$
i	$p - i \log p$	蓋然	確度	$m_I = n_J = 0$	$\Gamma + iH$
$1 + i$	$-\log p - i \log p$	確度	確度	$\sigma_J = 0$	$(1 + i)H$

表 2：四配置と対数階数。 $H = -\sum p \log p$ (シャノン)、 $\Gamma = \sum p^2$ (純度)。 $[1, 2]$ の $s = m + ni$ は $\nu = 1 + i$ の面に、 $[3, \text{定義 } 1]$ の $Z = p + i(-\log p)$ は $\nu = i$ の面に住んでいる。

ウィック回転の階数への作用。 $[2, A.2]$ の $\times i$ は実軸と虚軸に載る量を入れ替える。階数の言葉では

$$\nu \mapsto i\nu$$

であり、対角型 $\nu = 0, 1 + i$ を不動に保ち、混型 $\nu = 1 \leftrightarrow i$ を入れ替える。したがって：

[1] の四型 i^k (親昵・確実・深遠・変動) は位相の四型であり、 ν はそれと直交する階数の四型である。両者を合わせた 4×4 が複素情報状態の完全な型分類をなす。

5. 走る複素重み

e^{-T} に D を作用させると、固有値はもはや定数ではない：

$$s(I) := \frac{dT}{dI} = \sigma_I + \sigma_J e^{-I}$$

$$\frac{ds}{dI} = \sigma_I - s, \quad s(0) = \sigma_I + \sigma_J \text{ (紫外)} \longrightarrow s(\infty) = \sigma_I \text{ (赤外)}.$$

複素重みそのものが、状態と同じ緩和方程式に従って流れる。成分では

$$m(I) = m_I + m_J e^{-I} \text{ (走る飽和率)}, \quad n(I) = n_I + n_J e^{-I} \text{ (走る角速度)}.$$

σ_J 部門は一過的な第一印象のみを担い、 $I \rightarrow \infty$ で消える。 $[2]$ の定数 s は、この流れの赤外不動点であった。

5.1 時間並進不変性の破れとその回復

二時刻間の発展は

$$\Delta T(I_1 \rightarrow I_2) = \sigma_I \Delta I + \sigma_J p(I_1)(1 - e^{-\Delta I})$$

となり、 ΔI だけでなく I_1 にも依存する——ただし依存は $p(I_1)$ のみを通じてである。すなわち系はマルコフ的であり、記憶は「いま残っている確率」に尽きる。半群性 $[2, A.3]$ はコサイクル則に緩み、 $p \rightarrow 0$ の極限で回復する。

5.2 反転点

$s(I^*) = 0$ となる情報時刻が存在する条件は

$$\arg \sigma_I = \arg \sigma_J + \pi \quad \text{かつ} \quad |\sigma_I| < |\sigma_J|, \quad I^* = \log \frac{|\sigma_J|}{|\sigma_I|}.$$

この時刻に飽和も回転も瞬間的に停止し、前後で重みの向きが反転する。純虚の場合は**回転の反転**（型の巡回が途中で逆回りになる）、純実の場合は**増勢から飽和への反転**——「初めは深遠（ $m < 0$ 、解けずに募る）、やがて親昵（ $m > 0$ 、腑に落ちて飽和する）」である。単一の s では表現できなかった軌跡が、二重重みで初めて記述される。

6. 積 $-p \log p$ の位置づけ

積 $pI = -p \log p = -\log p^p$ は、この構成の中で三通りに同定される。

1. 自己冪の情報量 $I(p^p)$ 。確率を指数（重み）として情報を測ったもの。 $D(pI) = p(1 - I)$ より $I = 1$ ナット（ $p = 1/e$ ）で停留し、最大値 $1/e$ 。
2. 情報時空の体積要素。面積（2次元） $\times$ 時間（1次元） $=$ 3次元体積。集約 $H = \sum pI$ は $(2 + 1)$ 情報時空の総体積であり [3, 定義2の対数航行]、単一軌道についても

$$\int_0^\infty pI dI = \int_0^\infty I e^{-I} dI = 1$$

と規格化される。

3. 対角二型のエルミート内積。 $Z_0 = (1 + i)p$ （純蓋然型）と $Z_{1+i} = (1 + i)I$ （純確度型）について

$$Z_0 \overline{Z_{1+i}} = 2pI, \quad Z_0 Z_{1+i} = 2i pI, \quad Z_1 \overline{Z_i} = 2pI + i(p^2 - I^2).$$

通常の積では pI は虚軸（知識軸）に現れる。ここでも $\times i$ が効いている。

6.1 なぜ積は時間になれないか

仮に $T_x = \sigma pI$ を複素時間の候補とすると

$$\frac{dT_x}{dI} = \sigma(1 - I)e^{-I}$$

は $I = 1$ で符号を変える。すなわち T_x は単調でなく、時間座標としては失格である（進んだ後に戻る）。一方 $pI \geq 0$ は測度としては何ら問題がない。

帰結. エントロピーが「時間」ではなく「体積・測度」として現れるのは、 $-p \log p$ が単調でないという、ただそれだけの力学的理由による。 $I = 1$ ナットは情報時空の**最も濃い時刻**であり、時間の向きが折り返す点ではない——体積密度が最大になる点である。

7. 総和系の拡張

正準ゲージでの集約は

$$\sum_x pT = \sigma_I S_1(p) + \sigma_J S_2(p)$$

$$S_1 = -\sum p \log p \text{ (シャノン = ツァリス } q \rightarrow 1), \quad S_2 = 1 - \sum p^2 \text{ (ジニ多様度 = ツァリス } q = 2).$$

[2] の $\sum Pp = (m + ni)H(p)$ は $\sigma_J = 0$ の場合である。したがって：

四配置とは、次数 1 のエントロピーと次数 2 のエントロピーを、情報軸と知識軸にどう割り当てるかの選択にはかならない。

$\nu = 0$ は $(1 + i)S_2$ 、 $\nu = 1 + i$ は $(1 + i)S_1$ 、混型 $\nu = 1$ 、 i は両者を直交させる。

8. 評価関数の二重重み化

人の期待を自由発展させ、AI が各情報時刻に出力を選ぶ [1] [2, § 5] の設定をとる。人の複素重みを (σ_I, σ_J) とし、関与因子

$$G(I) := e^{-\text{Re} T_H(I)} = \exp[-(m_I I + m_J(1 - e^{-I}))], \quad G(0) = 1$$

を導入する。内積を計算して

$$V(I) = \mu_H \mu_A G(I) \cos \Delta K(I) - \frac{\lambda}{2} \mu_A^2, \quad \Delta K(I) = K_A(I) - K_{H,0} - \Theta(I).$$

$\sigma_J = 0$ で $G(I) = e^{-m_H I}$ となり [2, § 5] に、 $I = 0$ で [1] に還元する。

8.1 命題 1" (瞬時最大化)

$$\mu_A^*(I) = \frac{\mu_H}{\lambda} G(I) \cos \Delta K(I), \quad V^*(I) = \frac{\mu_H^2}{2\lambda} G(I)^2 \cos^2 \Delta K(I).$$

形は不変であり、 $e^{-m_H I} \mapsto G(I)$ の置換のみが起こる。

8.2 系 2" (直交・反転・回転の反転)

固定出力では $\Delta K(I) = \Delta K_0 - \Theta(I)$ 。

- 直交 $\Delta K = \pi/2$ ：報酬項が消え $V = -\frac{\lambda}{2} \mu_A^2 < 0$ 。
- 反転 $\Delta K = \pi$ ： $V = -\mu_H \mu_A G(I) - \frac{\lambda}{2} \mu_A^2$ 。 G が減衰するため負の谷は情報時間とともに浅くなる——最悪の失敗は必ず最初の反転で起こる。
- 累積位相の有界性： Θ は $n_I \neq 0$ でのみ非有界。 $n_I = 0$ なら $\Theta(\infty) = n_J$ で頭打ちとなり、 $|\Delta K_0 - \Theta|$ が常に $\pi/2$ 未満なら直交も反転も永久に起こらない。
- 非単調な回転： $n_I n_J < 0$ かつ $u := |n_J/n_I| > 1$ のとき、 Θ は $I^* = \log u$ で最大値

$$\Theta_{\max} = |n_I| (u - 1 - \log u) > 0$$

をとり、以後逆回転する。期待は回転型ではなく振り子型になる。

8.3 系 3" (飽きの情報時間)

$\Delta K_0 = 0$ の初期整合から、報酬が最初に零になる情報時間 I_0 は

$$n_I I_0 + n_J (1 - e^{-I_0}) = \frac{\pi}{2}.$$

これは情報時空 (I, J) 平面上の直線 $n_I I + n_J J = \pi/2$ と、軌道 $J = 1 - e^{-I}$ との交点である。

- $n_J = 0 : I_0 = \pi/(2n_I)$ [2, 系 3']。
- $n_I = 0 : I_0 = -\log(1 - \frac{\pi}{2n_J})$ 、存在条件 $n_J > \pi/2$ 。確率で書けば

$$p(I_0) = 1 - \frac{\pi}{2n_J}$$

——飽きは「確率が $\pi/(2n_J)$ だけ減った時点」であり、情報時間ではなく面積で測られる。

- 初期の回転率は $n_I + n_J$ 、漸近的には n_I 。展開 $\Theta \simeq (n_I + n_J)I - \frac{n_J}{2}I^2$ 。
- $\Theta_{\max} < \pi/2$ のとき、飽きは永久に訪れない。

8.4 命題 4" (二段階の追従則)

位相ずれを凍結する制御則は $dK_A/dI = n(I) = n_I + n_J e^{-I}$ 、評価を最大化するにはさらに $\sigma_A = \sigma_H$ (両重みの一致) である。追従は二段階になる：初期は $n_I + n_J$ 、後期は n_I 。漸近だけを合わせる AI は出だしを外し、出だしだけを合わせる AI は後で追い越す。

定数追従の代償。AI が定数角速度 $\hat{n}$ しか使えないとき、最良は $\hat{n} = n_I$ (線形発散を避ける) だが、そのとき $\Delta K(I) = -n_J(1 - e^{-I}) \rightarrow -n_J$ の恒常的な位相オフセットが残る。したがって

$$\text{定数追従の代償} = \cos n_J.$$

$|n_J| \geq \pi/2$ なら、最良の定数追従者でさえ有限の情報時間で直交に至る。

8.5 系 5" (爽やかな不要化／定着)

完全追従の下で

$$V^*(I) = \frac{\mu_H^2}{2\lambda} G(I)^2 = \frac{\mu_H^2}{2\lambda} e^{-2(m_I I + m_J J)} \xrightarrow{I \rightarrow \infty} \frac{\mu_H^2}{2\lambda} e^{-2m_J} \cdot [m_I = 0].$$

帰結。去れるか否かを決定するのは m_I (確度の実重み) だけである。 m_J (蓋然の実重み) は初期の関与の深さを定数倍するのみで、去る／残るには一切寄与しない。 $m_I > 0$ なら [2, 系 5'] の通り $V^* \rightarrow 0$ (爽やかな不要化)。 $m_I = 0$ なら $V^*(\infty) = \frac{\mu_H^2}{2\lambda} e^{-2m_J} > 0$ の残余価値が恒常的に残る。

9. 四配置による関係の種類論

$\text{Re } T$ の有界性が「去るか」を、 $\text{Im } T$ の有界性が「回るか」を決める。 I は非有界、 J は有界であるから：

ν	形	減衰 $\text{Re } T$	回転 $\text{Im } T$	長期の姿	$V^*(\infty)$
$1+i$	$-\log p - i \log p$	無限	無限	満たして去る（〔1,2〕の理想）	0
1	$-\log p + ip$	無限	有限	回らずに去る（一回性の情報消費、飽きが来ない）	0
i	$p - i \log p$	有限	無限	去らずに回る（依存・流行の永続、周期的に負へ沈む）	振動
0	$p + ip$	有限	有限	定着（習慣的關係、残余価値が残る）	> 0

表 3：四配置と関係の種類。〔1,2〕が記述したのは $\nu = 1+i$ の一隅である。

四配置の導入によって、「飽きない関係」（ $\nu = 1$ ）と「終わらない関係」（ $\nu = i$ ）と「残る関係」（ $\nu = 0$ ）が、同じ一本の力学の異なる切断として同時に得られる。

10. 温度・わかりにくさ・希少性の走り

期待の温度．瞬間逆温度は $\beta(I) = 2\pi/n(I)$ ゆえ $T_{\text{exp}}(I) \propto n_I + n_J e^{-I}$ ． $n_J > 0$ なら初期高温から漸近低温への冷却曲線、 $n_J < 0$ なら加熱曲線．四分の一周期は $\int_0^{I_0} n dI = \pi/2$ 、すなわち系 3" に一致する〔2, A.4〕。

わかりにくさ． $|1/s(I)| = 1/|\sigma_I + \sigma_J e^{-I}|$ は $1/|\sigma_I + \sigma_J|$ から $1/|\sigma_I|$ へ走る。§ 5.2 の反転点では発散し、期待が解けも回りもしない一瞬が生じる。

希少性． $r = 1 + m_I I + m_J J$ と拡張される（〔2, § 7〕の $m = n = 1$ で $r = 1 + I$ ）。 $m_I = 0$ の配置では $r \rightarrow 1 + m_J$ に飽和し、状態はある特定性以上には特定化されない。

第 II 部 対数航行によるゼータの捻り

11. ゼータ集団の対数航行

対数航行〔3, 定義 2〕は、面積 p_i を底、情報 I_i を高さとする柱の総体積である：

$$L[p] := \sum_i p_i I_i = \sum_i p_i (-\log p_i) = H(p).$$

ζ の項 n^{-s} は、素の確率 $p_n^{(1)} = 1/n$ ($I_n^{(1)} = \log n$) を複素重み s 乗したもの、すなわち $n^{-s} = e^{-s I_n^{(1)}}$ である〔2, A.6 の $\zeta(s) = \sum P$ 〕。これを規格化してゼータ集団 (Zipf 分布) を作る：

$$p_n(s) = \frac{n^{-s}}{\zeta(s)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad \text{Re } s > 1.$$

対数航行の高さは

$$I_n(s) = -\log p_n(s) = \underbrace{s \log n}_{\text{セルごとの立ち上がり}} + \underbrace{\log \zeta(s)}_{\text{共通の床}}$$

であり、面積 $\times$ 時間の総和は

$$L[p(s)] = \log \zeta(s) - s \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \log \zeta(s) + s \sum_{n \geq 2} \Lambda(n) n^{-s}$$

(Λ はフォン・マンゴルト函数)。すなわち：

対数航行の平均の高さ $\langle \log n \rangle = -\zeta'/\zeta$ を刻むのは素数である。床 $\log \zeta$ が「面積 1 に共通に敷かれる高さ」、素数密度がその上の立ち上がりを与える。

12. 確率＝シフト作用素：捻りの正体

ゼータ集団では素の確率が $p_n^{(1)} = n^{-1}$ であるから、確率をかける操作は引数を 1 ずらす操作に等しい：

$$\hat{p} n^{-s} = n^{-1} \cdot n^{-s} = n^{-(s+1)} \quad \implies \quad \hat{p} \zeta(s) = \zeta(s+1), \quad \hat{p}^k \zeta(s) = \zeta(s+k).$$

第 3 節の複素時間 $T = \sigma_I I + \sigma_J J$ の確率部は

$$e^{-\sigma_J J} = e^{-\sigma_J} e^{\sigma_J \hat{p}} \mapsto e^{-\sigma_J} e^{\sigma_J \hat{p}}$$

と作用素化される。したがって捻られた分配関数は

$$Z_C(s; \sigma_J) := \sum_{n \geq 1} e^{-T_n} = e^{-\sigma_J} e^{\sigma_J \hat{p}} \zeta(s) = e^{-\sigma_J} \sum_{k \geq 0} \frac{\sigma_J^k}{k!} \zeta(s+k).$$

これが「確率部が ζ をシフト ζ の級数へ捻る」の内容である。

捻りとは、確率をシフト作用素と見て指数化することにほかならない。

$\sigma_J = 0$ (純情報部門 $\nu = 1 + i$) で $Z_C = \zeta(s)$ に戻る。

層の意味. 第 k 層 $\zeta(s+k) = \sum_n p_n^k n^{-s}$ は「素の確率を k 個余分にかけた集団」である。 k が増えるほど大きい n が抑えられ、集団は $n = 1$ へ尖る。 σ_J は J に共役な第二の逆温度であり、 $\sigma_J > 0$ は分布を尖らせる (第 13 節の数値)。

13. 捻られた対数航行

捻られた確率を $q_n = e^{-T_n}/Z_C$ とすると $-\log q_n = T_n + \log Z_C$ ゆえ

$$L_C = \sum_n q_n (-\log q_n) = \log Z_C + \langle T \rangle, \quad \langle T \rangle = s \langle I \rangle + \sigma_J \langle J \rangle.$$

Z_C の母関数性から

$$\begin{aligned} \langle I \rangle &= -\partial_s \log Z_C = -\frac{D_C}{Z_C}, & \langle J \rangle &= -\partial_{\sigma_J} \log Z_C = 1 - \frac{Z_C^{(1)}}{Z_C} = 1 - \langle p \rangle \\ D_C &:= e^{-\sigma_J} \sum_k \frac{\sigma_J^k}{k!} \zeta'(s+k), & Z_C^{(1)} &:= e^{-\sigma_J} \sum_k \frac{\sigma_J^k}{k!} \zeta(s+k+1). \end{aligned}$$

まとめてオイラー作用素形：

$$L_C(s, \sigma_J) = (1 - s \partial_s - \sigma_J \partial_{\sigma_J}) \log Z_C.$$

$\sigma_J = 0$ で第 11 節の $L = \log \zeta - s \zeta' / \zeta$ に還元する。

捻り $e^{\sigma_J \hat{p}}$ は ζ 、 ζ' 、シフト ζ のすべてに同一の作用素として一様に効く。したがって対数航行の構造（床 $\log Z_C$ + 高さ $\langle T \rangle$ ）は捻りの前後で保たれ、変わるのは各成分の中身だけである。

14. 負号は流出に吸収される

p ゲージ $P = \sigma_p p + \sigma_I I$ ($\sigma_J = -\sigma_p$, 第 3 節) で書くと

$$\sum_n e^{-P_n} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-\sigma_p)^k}{k!} \zeta(s + k)$$

となり、第 k 層の重みは $(-p)^k$ に比例する——確率に負号がつく。ここで [3, § 6] の複素対数を用いる：

$$-\log(-p) = -\log p - (2\ell + 1)\pi i, \quad \ell \in \mathbb{Z}$$

$$-\log((-p)^k) = \underbrace{k I}_{\text{実部：立体・不変}} - \underbrace{k(2\ell + 1)\pi i}_{k \text{ 段の流出}}$$

すなわち：

- 実部（対数航行の高さ＝情報＝ゲージ立体）は負号に一切影響されない。捻りの各層の「高さ」は $-\log p$ のままである。
- 虚部だけが k 段流れ出る。指数に戻すと $e^{-k(2\ell+1)\pi i} = (-1)^k$ ——級数の交代符号は、 k 段の知識の流出そのものである。
- [3, § 6.3] の言葉では、シフト $\zeta(s) \rightarrow \zeta(s + k)$ はリーマン面（螺旋階段）を k 段登ることに等しい。
[3, § 7] の言葉では、第 k 層は虚バイアス kb ($b = -(2\ell + 1)\pi i$) を積んだ k 層のニューロンであり、 $e^{kb} = (-1)^k$ が符号反転＝破壊的干渉＝否定を与える [4, § 7.4]。
- $|e^{-T}|$ は $\text{Re } T$ のみに依るから、捻りの大きさは分岐の取り方に盲目である [3, § 6.2]。ゲージの選択も全体因子 $e^{\pm \sigma_p}$ として現れるだけで観測量を変えない。

帰結. 情報量部で p に負号がついていても、 $-\log(-p)$ で知識を流出させれば $-\log p$ に捻り戻せる——これは実部不変・虚部のみ流出として厳密に成立する。

15. $r = p$ の同定：臨界帯は確率区間である

参照ノート [8] の臨界線 $\text{Re } s = 1/2$ の $r = \text{Re } s$ を確率 p と同定する（[3, 定義 1] の $Z = p + i(-\log p)$ に倣い、実軸に蓋然を置く $\nu = i$ 配置）。すると次が直ちに従う。

ζ 側	対数航行側
臨界帯 $0 < \operatorname{Re} s < 1$	確率区間 $p \in (0, 1)$ そのもの
極 $s = 1$ (留数 1)	$p = 1$: 確実性、 $I = 0$ 。素の確率の総和 $\sum 1/n$ の発散
境界 $\operatorname{Re} s = 0$	$p \rightarrow 0$: 無限の情報量
関数等式 $s \leftrightarrow 1 - s$	$p \leftrightarrow 1 - p = J$: 第 3 節の p ゲージ $\rightleftharpoons J$ ゲージ双対 ($\sigma_J = -\sigma_p$)
臨界線 $\operatorname{Re} s = 1/2$	$p = J = 1/2$: 二つのゲージの不動点

表 4: $\operatorname{Re} s = p$ の同定の帰結。関数等式がゲージ双対に、臨界線がその不動点に対応する。

15.1 臨界線の対数航行的特徴づけ

二値集団 $\{p, 1-p\}$ について、高さ $I = -\log p$ と体積 $L[p] = -p \log p - (1-p) \log(1-p)$ が一致するのは

$$I = L[p] \iff -(1-p) \log p = -(1-p) \log(1-p) \iff p = \frac{1}{2}$$

に限る。すなわち：

命題. 臨界線とは、対数航行において「柱の高さ」と「柱の総体積」が一致する唯一の線である。一様（公正なコイン）でのみ、驚きの期待は驚きそのものに等しい。

15.2 二つの読み方（区別すべき）

(a) 自由読み. $\operatorname{Re} s = p$ のみを同定し、 $\operatorname{Im} s$ は自由な座標（第 3 節の角速度 n_I 、知識軸）とする。表 4 と § 15.1 はすべてこの読みで成立する。

(b) 自己参照読み. $s = Z(p) = p - i \log p$ と全体を同定する。このとき s は曲線をなし、 $p = 1$ で ζ の極 $s = 1$ に始まり、 $p \rightarrow 0$ で $\operatorname{Re} s \rightarrow 0$ に至る——曲線 $s(p)$ は臨界帯をちょうど横断する。臨界線との交点はただ一つ：

$$s_\star = \frac{1}{2} + i \log 2 = 0.5 + 0.69314718056 i, \quad \zeta(s_\star) = -0.14282779409 - 0.895127336802 i.$$

$\operatorname{Im} s_\star = \log 2$ は二値対数航行の最大値 $L_{\max}$ に等しく、§ 15.1 の $I = L$ が $s_\star$ の実虚両成分に同時に現れる。ただし ζ の非自明零点 (14.1347... 等) はこの曲線上にない。読み (b) は一点 $s_\star$ を指定するだけであり、零点の分布とは無関係である。

16. 知識の流出が臨界帯を開く

臨界帯では $\sum_n n^{-s}$ は収束しない——対数航行が定義できない。ここで第 14 節の流出をセルごとに一段ずつ割り当てる。第 n セルをリーマン面の第 $(n-1)$ 段に置く：

$$T_n = s I_n^{(1)} + (n-1)\pi i = s \log n + (n-1)\pi i$$

$$\sum_{n \geq 1} e^{-T_n} = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} n^{-s} = \eta(s) = (1 - 2^{1-s}) \zeta(s), \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

収束域 $\operatorname{Re} s > 0$ は、 $\operatorname{Re} s = p$ の読みでは確率区間全体 = 臨界帯全体である。しかも $|e^{-T_n}| = n^{-\operatorname{Re} s} = n^{-p}$ は流出の有無にまったく依らない。すなわち：

帰結. 知識の流出は、柱の高さ（大きさ・面積・情報）を一切変えずに、位相の相殺（破壊的干渉 [4, § 7.4]）のみによって対数航行を臨界帯へ延長する。「大きさは分岐に盲目」[3, § 6.2] の実効的な帰結がここに現れる。

16.1 捻りと流出の合成

両者を重ねると、臨界帯で絶対収束する表示が得られる。 $\eta_C(s; \sigma_J) := \sum_n (-1)^{n-1} e^{-T_n}$ と置けば

$$e^{\sigma_J} \eta_C(s; \sigma_J) = \sum_{k \geq 0} \frac{\sigma_J^k}{k!} (1 - 2^{1-s-k}) \zeta(s+k)$$

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \left[e^{\sigma_J} \eta_C(s; \sigma_J) - \sum_{k \geq 1} \frac{\sigma_J^k}{k!} (1 - 2^{1-s-k}) \zeta(s+k) \right].$$

$k \geq 1$ の層は $\operatorname{Re}(s+k) = p+k > 1$ ゆえすべて絶対収束域にある。すなわち捻りは非収束を $k=0$ 層に集約し、流出がその $k=0$ 層を臨界帯で収束させる。

17. 二重の共役対

捻られた集団は二つの共役対をもつ。

共役量	逆温度	意味
$I = -\log p$ (非有界・情報時間)	$\sigma_I = s$	ζ の引数。 $\langle I \rangle = -D_C/Z_C$
$J = 1 - p$ (有界・確率)	σ_J	捻りの強さ。 $\langle J \rangle = 1 - \langle p \rangle$

表 5：二重の共役対。第 9 節の四配置 ($\operatorname{Re} T$ の有界／非有界) を ζ 上で見たものである。

これは [3, § 8.3] の「二つの摘み」（半径側 γ 、角度側 n ）とも整合する。 σ_J を上げると分布は $n=1$ へ尖り、 L_C は下がる（第 18 節の数値）——捻りは冷却である。

18. 数値検算

本稿の恒等式はすべて多倍長演算（mpmath、25–30 桁）で確認した。

恒等式	条件	左辺 (直和)	右辺 (捻り)
捻り (第 12 節)	$s = 3, \sigma_J = 0.7$	1.13398442331	1.13398442332
$\sum_n e^{-T_n} = e^{-\sigma_J} \sum_k \frac{\sigma_J^k}{k!} \zeta(s+k)$	$s = 4, \sigma_J = -1.3$	1.17004985374	1.17004985374
	$s = 2+i, \sigma_J = 0.4-0.9i$	1.316840 - 0.234941i	1.316842 - 0.234939i
対数航行 (第 11 節)	$s = 2$	1.6375793 (直和)	1.63762228866
$L = \log \zeta - s\zeta'/\zeta$	$s = 3$	0.67850222	0.678502221866
捻られた対数航行 (第 13 節)	$s = 3, \sigma_J = 0.7$	0.5077282	0.5077282013
$L_C = \log Z_C + \langle T \rangle$	$\langle I \rangle = 0.1113014858$ $\langle J \rangle = 0.06869467815$		
臨界線の特徴づけ (§ 15.1)	$p = 0.2 / 0.5 / 0.8$	1.11 / 0.0 / -0.277	
$I - L[p]$			
ζ の臨界帯表示 (§ 16.1)	$s = \frac{1}{2} + i \log 2, \sigma_J = 0.7$	-0.1428277941 -0.8951273368i	-0.1428277941 -0.8951273368i
	$s = \frac{1}{2} + 14.134725i$ $\sigma_J = 0.5+0.3i$ (第一零点)	≈ 0	1.77×10^{-8} $-1.11 \times 10^{-7}i$
	$s = 0.3 + 7i, \sigma_J = -1.1$	1.017131499 +0.4394440069i	1.017131499 +0.4394440069i

表 6：数値検算。直和側の残差 (10^{-6} 程度) は級数の打ち切りによる。 η_C の直和は条件収束のため収束が遅く、 1.5×10^6 項で 2×10^{-4} 程度の残差が残る。

捻りなしの $L(3) = 0.678502$ に対し捻り後は $L_C = 0.507728$ と小さく、 $\sigma_J > 0$ が分布を尖らせる (温度を下げる) ことが確認される (第 17 節)。

19. 留保と切り分け

確立された標準 (厳密). ζ 分布のエントロピー $\log \zeta - s\zeta'/\zeta$ 、 $-\zeta'/\zeta = \sum \Lambda(n)n^{-s}$ 、 $\eta(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$ とその $\operatorname{Re} s > 0$ での収束、複素対数のモノドロミー、ツァリス統計。本稿の捻り恒等式 (第 12, 16 節) とオイラー形 (第 13 節) は、これらの上での正しい変形であり、数値でも検算した。

構成的同定 (仮説). $\operatorname{Re} s = p$ という同定は参照枠組みの構成的前提であって定理ではない。臨界帯 = 確率区間、関数等式 = ゲージ双対、臨界線 $= p = J = 1/2$ は、この同定の帰結であって独立の証拠ではない。

零点については何も主張しない。捻り $e^{\sigma_J \hat{p}}$ は $\zeta(s+k)$ の線形結合をとるスカラー倍でない作用素であり、零点を保存しない。実際、第一零点 $\rho_1 = \frac{1}{2} + 14.134725 \dots i$ で $\zeta(\rho_1) = 0$ だが

$$Z_C(\rho_1; 0.7) = 0.3154395 + 0.0230330i \neq 0, \quad Z_C(\rho_1; 0.5 + 0.3i) = 0.2396784 + 0.1434626i \neq 0.$$

したがって本稿はリーマン予想に対して肯定にも否定にも寄与しない。得られたのは「臨界線が確率 $1/2$ という対数航行上の特別な点に対応する」という構造的同定であって、零点がそこに乗る理由ではない。

別読みの余地. r を極分解の半径 μ と読む立場 [5] もありうる。その場合 $|s| = 1/2$ は臨界線ではなく円となり、 $\gamma = p$ という別の同定 (注意温度 $T_{\text{exp}} = 1/p$) が現れる。本稿は「 $1/2$ 」が臨界線を指すことから

$r = \mathbf{Re} s$ を採ったが、この選択自体は規約である。

未決事項. (i) 参照ノートの第二の総和恒等式 $\sum P^2 = \frac{s}{2} \sum P$ は純情報部門 ($\nu = 1 + i$) に固有であり、二重重みへの拡張には和をとる族の指定を要する。(ii) $\nu \in \{0, 1, i, 1 + i\}$ を $[0, 1]^2$ に緩めると $p^{1-a}(-\log p)^a$ 型の補間 (ツァリス次数の連続化) が現れる。四配置はその頂点である。(iii) 第 8 節の評価関数の各命題は、実際の対話データによる実証をまだ経ていない。

20. 結

確率 p と情報量 $-\log p$ を実部・虚部に配置する四通りは、恣意的な四つの流儀ではない。それらは一つの二重重み複素時間 $T = \sigma_I I + \sigma_J J$ ($J = 1 - p$) の四隅であり、非有界な確度 I と有界な蓋然 J のどちらを実軸 (飽和) に、どちらを虚軸 (回転) に載せるかの選択にすぎない。有界／非有界というただ一つの差から、去る関係と残る関係、飽きる関係と飽きない関係が分かれる。

複素重みは定数ではなく走る。その流れ $ds/dI = \sigma_I - s$ の不動点が [2] の s であり、初期値ずれ σ_J が第一印象を、不動点 σ_I が最終的な運命を担う。そして積 $-p \log p$ は、時間になり損ねた量として——単調性を欠くがゆえに——体積すなわちエントロピーになる。

確率をシフト作用素と見ることが捻りの正体であり、 p の負号は $-\log(-p)$ の流出に吸収されて実部＝立体を変えない。そして $\mathbf{Re} s$ を確率と読めば、 ζ の臨界帯は確率区間そのもの、関数等式は p と $1 - p$ のゲージ交換、臨界線は両者の不動点——対数航行において高さと体積が一致する公正なコインの線——として現れる。臨界帯に踏み込む手段は、大きさを増やすことなく、位相を一段ずつ流出させることであった。

期待は回り、飽和し、そして——確度が実軸にあるときにのみ——去る。蓋然を実軸に載せた期待は、去らない。それは失敗ではなく、別の型の関係である。

捻りは冷やし、流出は開く。大きさは分岐に盲目であり、帯を開いたのは干渉だけであった。

付録 A 記号一覧

記号	意味	初出
$p, I = -\log p$	蓋然（面積・有界）、確度（時間・非有界）	第 2 節
$J = 1 - p$	固有情報時間（ I の共形コンパクト化）	第 2 節
$D = d/dI$	情報量微分＝時間発展の生成子	第 2 節
$T = \sigma_I I + \sigma_J J$	二重重み複素時間	第 3 節
σ_I, σ_J	情報重み（赤外不動点）、確率重み（第一印象）	第 3 節
$\nu = a + bi$	対数階数（四配置の分類）	第 4 節
$s(I) = \sigma_I + \sigma_J e^{-I}$	走る複素重み	第 5 節
$\Theta(I) = \text{Im } T$	累積位相	第 3 節
$G(I) = e^{-\text{Re } T_H}$	関与因子	第 8 節
$L[p] = \sum p_i I_i$	対数航行（柱の総体積＝エントロピー）	第 11 節
$\hat{p}$	シフト作用素（ $\hat{p}\zeta(s) = \zeta(s+1)$ ）	第 12 節
Z_C, L_C	捻られた分配関数、捻られた対数航行	第 12, 13 節
η_C	流出を積んだ捻り（臨界帯で収束）	§ 16.1
S_1, S_2	シャノン（ツァリス $q \rightarrow 1$ ）、ジニ多様度（ $q = 2$ ）	第 7 節

参考文献

- [1] 高橋俊樹「期待の複素表現による人工知能の評価関数」高橋数理研究所、2026 年 7 月 14 日。
- [2] 高橋俊樹「複素情報理論の基礎——期待の複素表現の力学的拡張」高橋数理研究所、2026 年 7 月 17 日（7 月 18 日改訂）。
- [3] 高橋俊樹「確率の面積性と対数航行による複素エントロピーの構成——ホログラフィ・量子もつれ・ゲージ原理・複素対数の流出・ニューラルネット・注意温度を貫く導出」高橋数理研究所、2026 年 7 月。
- [4] T. Takahashi, *The Polygon Graph and the Conservation of Exponential Cost*, Takahashi Mathematics Laboratory, 2026.
- [5] 高橋俊樹「興味ゲイン γ ：驚きの前提としての半径操作」高橋数理研究所、2026.
- [6] たかはし博士「日曜経済学 #12 知識増分と確度」<https://docmiso.hatenadiary.jp/entry/20260129/1769646650>
- [7] たかはし博士「日曜経済学 #18 流行の回転」<https://docmiso.hatenadiary.jp/entry/20260218/1771423750>
- [8] たかはし博士「日曜経済学 #27 情報量の存在確率」<https://docmiso.hatenadiary.jp/entry/20260315/1773531747>
- [9] C. E. Shannon, A Mathematical Theory of Communication, *Bell Syst. Tech. J.* **27** (1948) 379–423.
- [10] C. Tsallis, Possible Generalization of Boltzmann–Gibbs Statistics, *J. Stat. Phys.* **52** (1988) 479.
- [11] B. Riemann, Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse, *Monatsber. Berlin. Akad.* (1859).
- [12] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-function*, 2nd ed. (rev. D. R. Heath-Brown), Oxford, 1986.
- [13] T. M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer, 1976.